

# RC 構造物の線形・非線形解析 (その 1)

吉川弘道・小森健史・小立将・北本廣平

## 1. 動的解析理論

- (1) 1 自由度系モデルの動的解析理論
- (2) Newmark- $\beta$ 法による数値解法

## 2 鉄筋コンクリート橋脚の解析

- (1) 断面解析
- (2) 各種復元力モデルの特徴

## 3. 対象橋脚のモデル化

(その 1)

## 4. 線形動的応答解析

- (1) 加速度応答スペクトルの周期特性
- (2) 時刻歴応答加速度・変位
- (3) 入力加速度の振幅調整

## 5. 非線形動的応答解析

- (1) 復元力特性
- (2) 入力諸元と時刻歴結果
- (3) 最大応答値の比較

(その 2)

## 6. 線形・非線形解析結果の比較

## 参考文献

# 1. 動的解析理論

## (1)1 自由度系モデルの動的解析理論

構造物は外力を受けて振動する。地震動が作用した時を例にとると、構造物は地面とともに振動する状態が続くことになる。このことを強制振動という。このように外力が作用している場合を強制振動状態という。また、地面が静止しても、構造物の揺れはしばらく残る。この状態が自由振動である。強制振動のあとに自由振動が発生するということになる。ここでは自由振動、強制振動の基本運動方程式について述べる。

図 1-1 に示す質量  $m$ 、減衰  $c$ 、復元力  $k$  を持つ 1 自由度系について考える。

質点にゆっくりと荷重  $P$  を載荷して、変位  $x$  が生じた状態を考えると、運動方程式は、復元力 (restoring force) により元の位置に戻ろうとすることを考慮し、次式のようになる。

$$kx = P \tag{1.1}$$

質点にすばやく荷重  $P$  を載荷すると、慣性力が生じ、次式のようになる。

$$m\ddot{x} + kx = P \tag{1.2}$$

さらに、ダッシュポットによる粘性減衰力 (viscous damping) を考慮すると、次式を得る。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P \tag{1.3}$$

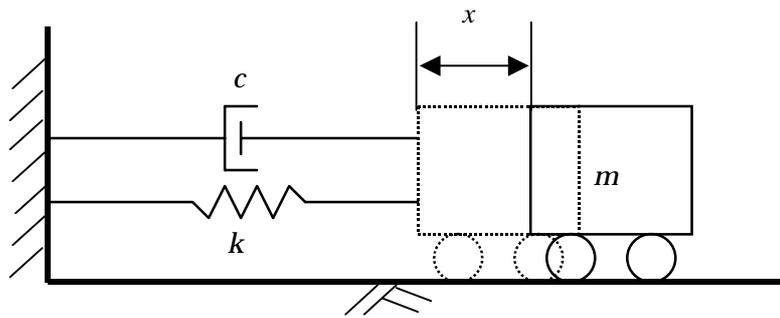


図 1-1 自由振動モデル

### (a) 自由振動

式 (1.3) において右辺が 0 のときを、自由振動状態という。この自由振動状態において、同式で減衰が作用しない (つまり左辺の第二項の  $c\dot{x} = 0$ 、右辺の  $P=0$ ) ときを、非減衰自由振動という。一般に次式で表される。

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1.4}$$

式 (1.4) に示す非減衰は、いったん振動が生じると永久にその運動を持続することになる。

しかし、実際に振動は次第に減衰し、最後に停止する。また、式 (1.3) において、自由振動状態で粘性減衰を考慮し、右辺の入力の項を 0 とおいた場合 ( $P=0$ ) を減衰自由振動と呼び、一般に次式で表される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{1.5}$$

すなわち、ダッシュポット (dash pot) による減衰を考えたものが、減衰振動である。

減衰力は速度に関する係数であり、次のような性質を持っている。

- ① 遅い速度では速度に比例する。
- ② 中程度の速度では速度の 2 乗に比例する。
- ③ 速い速度では速度の複雑な関数となる。

②、③ の場合には運動方程式が非線形微分方程式となり、複雑な解析になる場合が多い。

一般的に構造物の振動は、比較的遅い速度をもつ振動と考えてよい場合が多く、①を適用する。すなわち、減衰は粘性減衰係数  $c$  (coefficient of viscous damping) により表され、これにより粘性減衰力  $c\dot{x}$  が働いている。 $h$  を減衰定数 (damping constant) とよび、質量  $m$  と剛性  $k$  によって定まる量である。質量・剛性が大きい構造物は減衰定数  $h$  が小さくなり、逆に質量・剛性が小さい構造物は減衰定数  $h$  が大きくなる。

表 1-1 に 1 自由度系 1 質点の自由振動についてまとめる。

表 1-1 自由振動(非減衰/減衰)

	非減衰自由振動	減衰自由振動
運動方程式	$m\ddot{x} + kx = 0$ $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ $\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
理論解	<p>・変位 <math>x</math> の一般解</p> $\begin{cases} x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ = x_{\max} \sin(\omega_0 t + \alpha) \end{cases}$ $x_{\max} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$ $\tan \alpha = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}$ <p>初期条件 <math>t = 0</math> のとき 変位 <math>x = x_0</math> 速度 <math>\dot{x} = v_0</math></p>	<p>(<math>h &lt; 1</math>: 減衰振動の場合)</p> <p><math>x = (\text{減衰項}) \times (\text{定常振動項})</math></p> $\begin{cases} \text{減衰項} : A \exp(-h\omega_0 t) \\ \text{定常振動項} : \sin(\sqrt{1-h^2}\omega_0 t + \phi) \end{cases}$ <p><math>A</math> <math>\phi</math>: 初期条件で決まる</p>
備考	固有円振動数: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	減衰定数: $h = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$

(b)強制振動

図 1-2 に示す質量  $m$ , ダッシュポット  $c$ , バネ  $k$  について強制振動を考える. 式(1.3)において, 右辺に力が作用している状態, つまり外力(定常振動, 強制振動)が作用している場合を強制振動状態といい一般に次式で表される.

$$\text{定常振動} : m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin \omega t \quad (1.6)$$

$$\text{非定常振動} : m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_e \quad (1.7)$$

ここで外力については, 風, 波浪, 地震などが考えられ, 構造物に一定周期外力が作用する状態, すなわち, 一定振動数一定振幅の振動を定常振動(steady state vibration)と呼ぶ. しかし, 地震・風などによる振動は定常的なものではなく, 不規則なものである. このような振動を非定常振動という. そこで, これらの運動方程式及び理論解を表 1-2, 解析結果の一例を図 1-3 に示す.

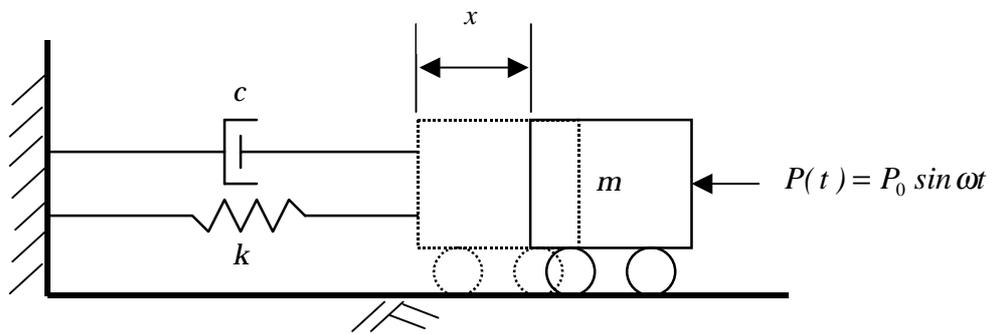


図 1-2(a) 強制振動モデル(定常時)

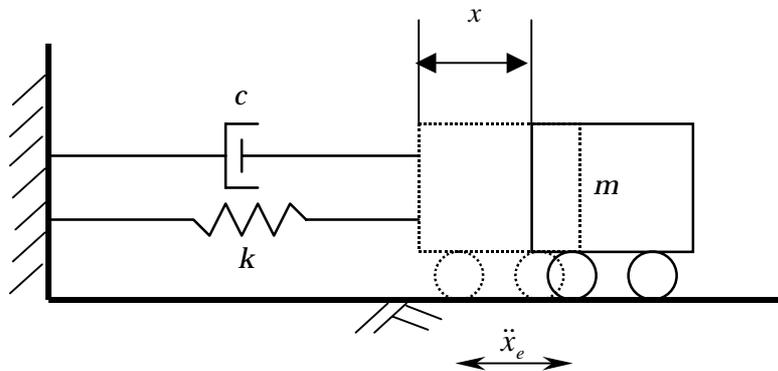


図 1-2(b) 強制振動モデル(非定常時)

ここで,  $\omega/\omega_0$  は振動数比と呼ばれ, 入力振動数  $\omega$  を 0 に近づけるとは, 振動しないことを表しており, 静的に力を加えたことと同等である. また,  $\omega/\omega_0=1$  のとき, つまり入力振動数と部材の振動数が等しいとき, 共振現象を表しており,  $h=0.05$  のとき動的振幅は 10 倍,  $h=0.2$  のときは 2.5 倍になることが一般に式で示されている. 構造物の周期が地震動の周期に近いとき, 大きな変位応答を示すことを表わす(図 1-3).

さらに,  $\omega/\omega_0 > 1$  となると, 動的変位は静的変位より小さくなり, この特性は, 構造物が剛の場合には構造物の応答は地表面の振動と同じように動くと考えられる.

表 1-2 強制振動による定常振動

	荷重外力	地震外力
運動方程式	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin \omega t$ $\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_0}{m} \sin \omega t$	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_e$ $\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \omega^2 \sin \omega t$
理論解	$x = x_0 \sin(\omega t - \phi)$ $x_0 = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{\left[ \left\{ 1 - (\omega/\omega_0)^2 \right\}^2 + (2h\omega/\omega_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$ $\tan \phi = \frac{2h(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$	$x = x_0 \sin(\omega t - \phi)$ $x_0 = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{\left[ \left\{ 1 - (\omega/\omega_0)^2 \right\}^2 + (2h\omega/\omega_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$ $\tan \phi = \frac{2h(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$
備考	$\omega$ : 外力の円振動数 $\omega_0$ : 部材の円振動数	$\ddot{x}_e$ : 地震動の加速度 $x_e = a_0 \sin \omega t$

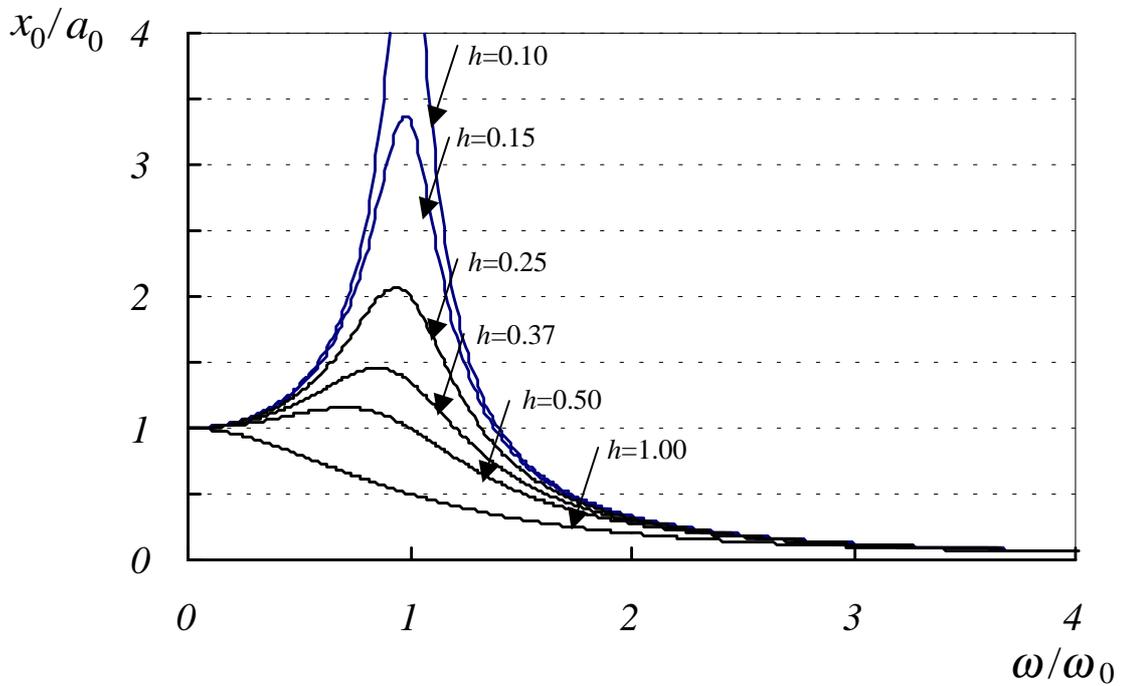


図 1-3 変位応答倍率と振動数比との関係: 共振曲線

(2) Newmark- $\beta$ 法による数値解法

前節(1)に示す式(1.6)より1自由度系1質点の運動方程式が次のように得られる.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (1.8)$$

ここに,  $m, c, k$ , はそれぞれ, 質量, 減衰係数, バネ定数であり,  $\ddot{x}, \dot{x}, x$  はそれぞれ, 加速度, 速度, 変位である. 外力  $P(t)$  を微小時間  $\Delta t$  間隔に区分し, 図 1-4 のような長方形パルスの集合と考えると,  $(i+1)$  ステップにおける運動方程式は次式のようになる.

$$m\ddot{x}_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} + kx_{i+1} = P_{i+1} \quad (1.9)$$

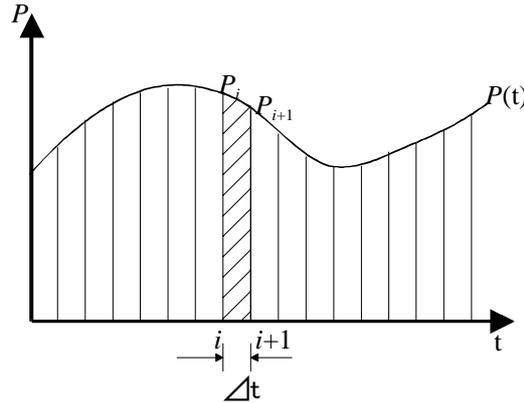


図 1-4 作用する外力の分割

ここで  $\Delta t$  における加速度変化を  $\beta$  を用いて表す,  $(i+1)$  ステップでの速度, 変位を次式のように仮定する.

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \quad (1.10)$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \dot{x}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_i + \beta \Delta t^2 \ddot{x}_{i+1}$$

(1.11)

ここで, 式(1.10), (1.11)を式(1.9)に代入して, 未知数  $\ddot{x}_{i+1}$  を求めると次式が得られる.

$$\ddot{x}_{i+1} = \left(m + \frac{\Delta t}{2} c + \beta \Delta t^2 k\right)^{-1} \left[ P_{i+1} - c \left(\dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}_i\right) - k \left\{ x_i + \Delta t \dot{x}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_i \right\} \right] \quad (1.12)$$

したがって, 計算順序は式(1.12)で加速度  $\ddot{x}_{i+1}$  を求め, 式(1.10), (1.11)で速度  $\dot{x}_{i+1}$ , 変位  $x_{i+1}$  を求める. 次に,  $\ddot{x}_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, x_{i+1}$  を既知量として  $(i+2)$  ステップでの加速度, 速度, 変位を算出する(図 1-5).

一般に初期条件としては, 時間  $t=0$  のときの速度  $\dot{x}_0$ , 変位  $x_0$  を与えられることが多く, これを用いて順次計算する.  $t=0$  における加速度  $\ddot{x}_0$  は式(1.9)で  $i+1=0$  とおくと次式のようになる.

$$m\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 = P_0 \quad (1.13)$$

$$\therefore \ddot{x}_0 = \frac{P_0 - c\dot{x}_0 - kx_0}{m} \quad (1.14)$$

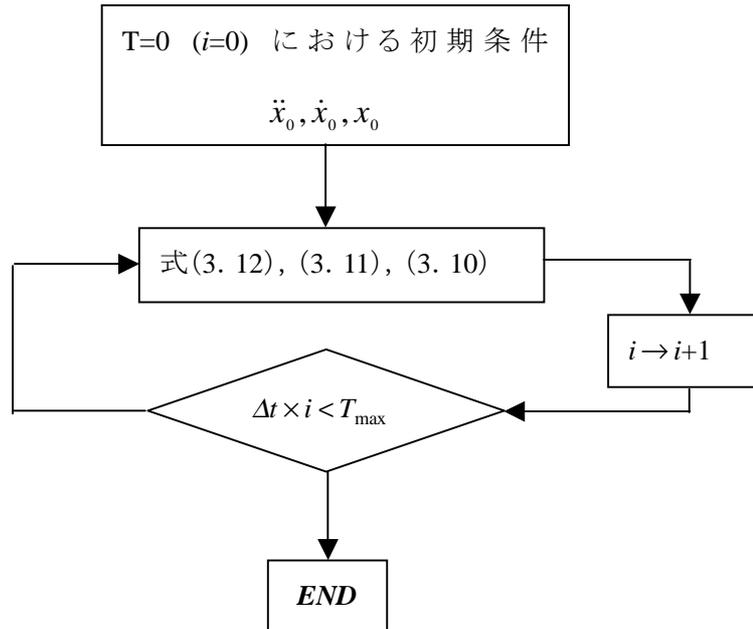


図 1-5 Newmark- $\beta$ 法

Newmark- $\beta$ 法において、 $\beta=1/4$  の場合は平均化速度法、 $\beta=1/6$  の場合は線形加速度法、 $\beta=1/8$  の場合は段階加速度法と呼ばれ、この $\beta$ の違いにより、加速度 $\ddot{x}$ の変化の仮定が異なることを意味する。 $\beta=1/8$ とすれば加速度は微小区間 $\Delta t$ 内において、その中央で加速度が変化するものとし、 $\beta=1/6$ とすれば加速度の変化は線形、 $\beta=1/4$ とすれば加速度は一定で時刻 $t$ と $t + \Delta t$ の平均値を取る。

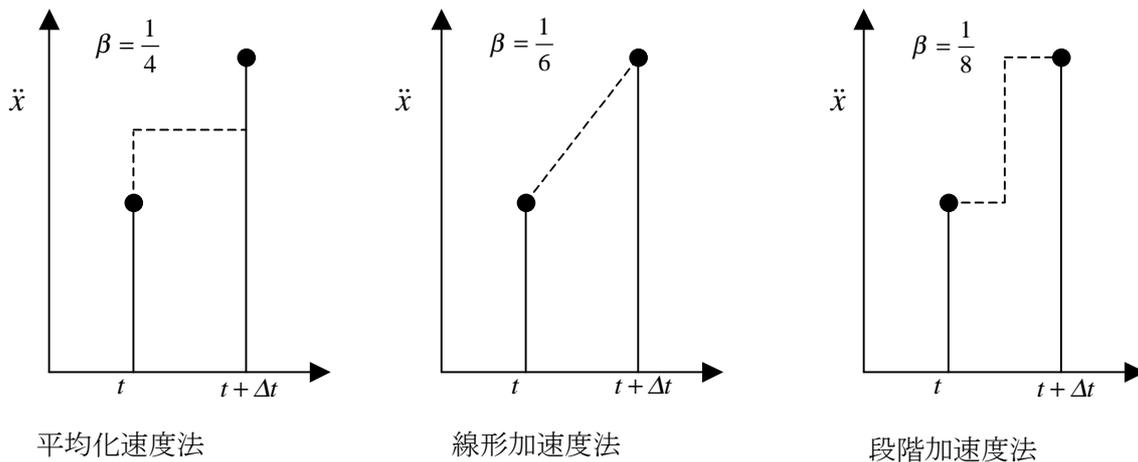


図 1-6  $\beta$ による加速度の変化

ここで, Newmark- $\beta$ 法による非線形動的応答解析を行い, 理論解との比較を示した(図 1-7). なお, 細線は理論解, 太線は Newmark- $\beta$ 法による数値解析解結果を示す.

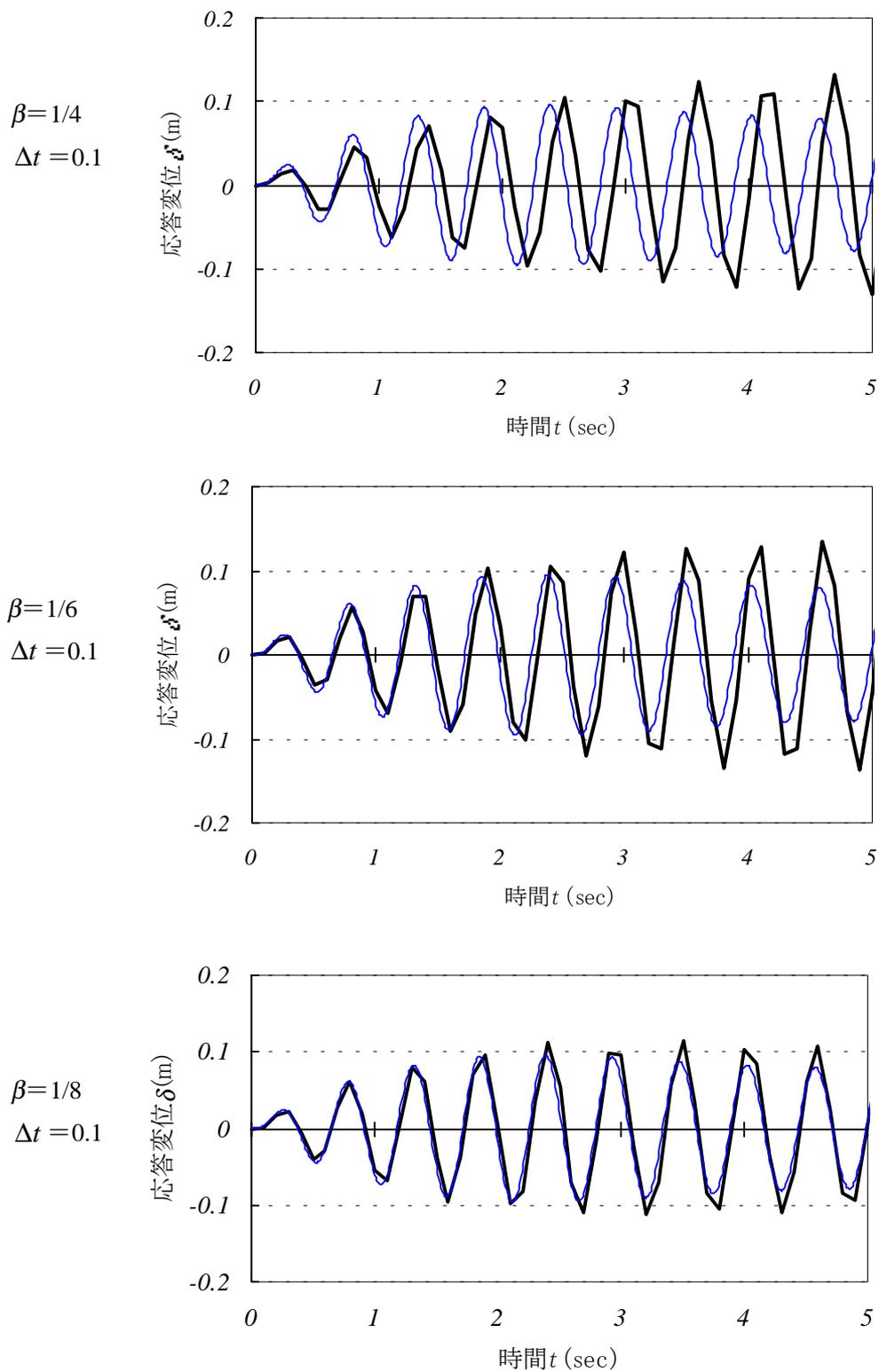


図 1-7 時刻歴応答解析例:  $\beta$ による比較

Newmark- $\beta$ 法による解(加速度, 速度, 変位)は時間間隔  $\Delta t$  の関数として表されるため, 解の精度は  $\Delta t$  の大きさに依存することになる.  $\Delta t$  が解析しようとする系の固有周期  $T_n$  の 1/10 程度の大きさであれば,  $\beta=1/6$  は安定(発散しない)し, 精度の良い解を与えるが,  $\Delta t$  が  $T_n/3$  のように大きな値となれば,  $\beta=1/6$  は不安定(発散する)となる. ただし,  $\beta=1/4$  の場合に関しては精度の如何によらず線形問題では絶対安定であるという特徴を持つ. 図 1-8 に  $\beta=1/4$  のときの時間間隔  $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.01$  における理論解との比較を示した. なお, 細線は理論解, 太線は解析解を示す.

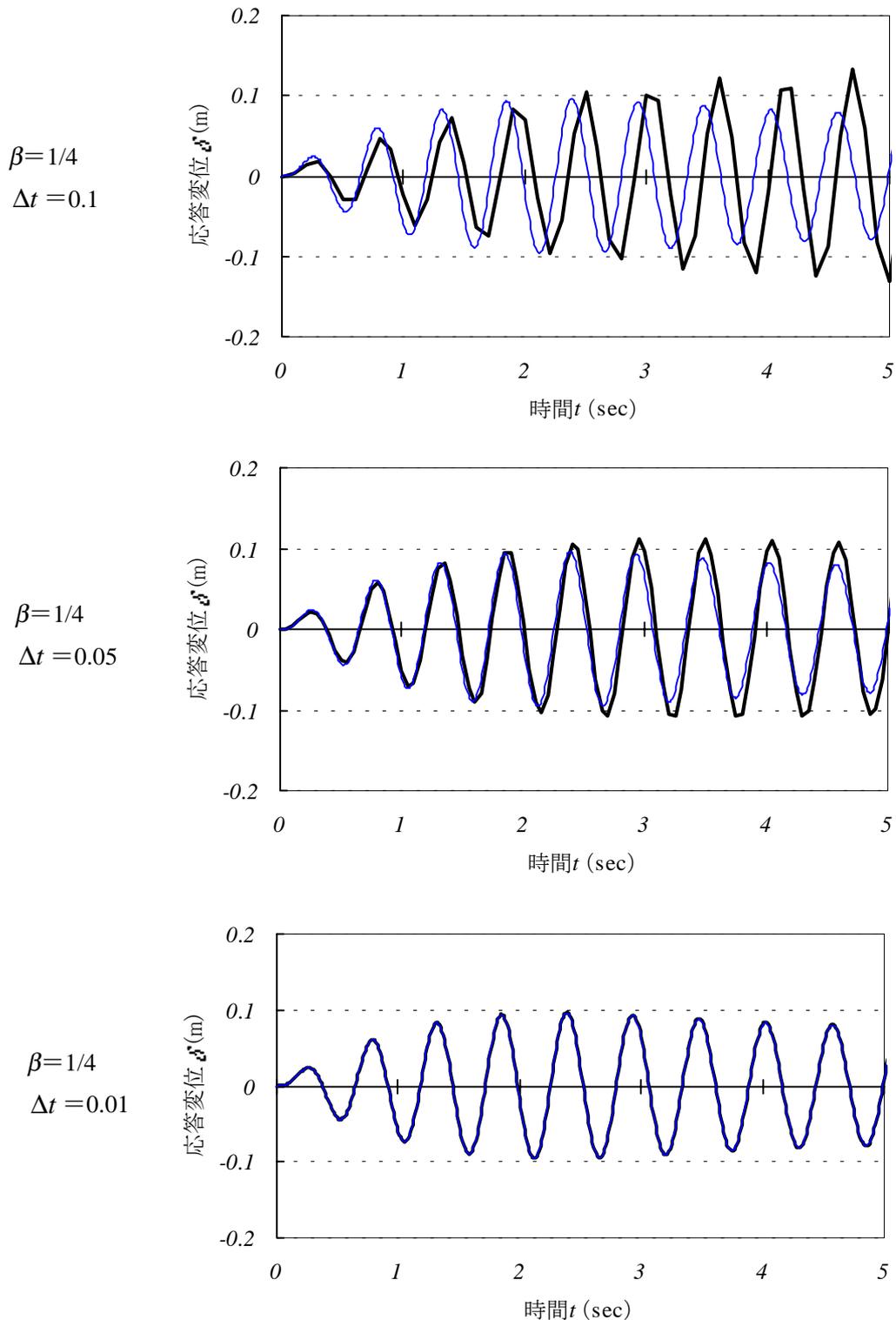


図 1-8 時刻歴応答解析例:  $\Delta t$ による比較

以上を表 1-3 にまとめる.

表 1-3 Newmark- $\beta$ 法による数値解析法

運動方程式の数値解析法	加速度の変化の過程	計算誤差	安定性
平均化速度法 $\beta = 1/4$	$t_n$ と $t_n + \Delta t$ の平均値(一定)	大 	高い 
線形加速度法 $\beta = 1/6$	線形変化		
段階加速度法 $\beta = 1/8$	$\Delta t$ 間の中央で変化	小	低い

## 2.RC 橋脚の解析

### (1) 断面解析

図 2-1(b)のような断面を仮定すると、その断面の応力関係は、式(2.1)、式(2.2)のような釣合い方程式が仮定される。ここで、軸力  $N$  とは、橋脚にかける力であり曲げモーメント  $M$  とは、偏心軸圧縮応力によってもたらされる、断面内力である。また、偏心量  $e$  とは断面中心から軸力が作用する位置までの距離を指す。これらの式を用い、骨格曲線 ( $M-\phi$  関係) を算出することができる。

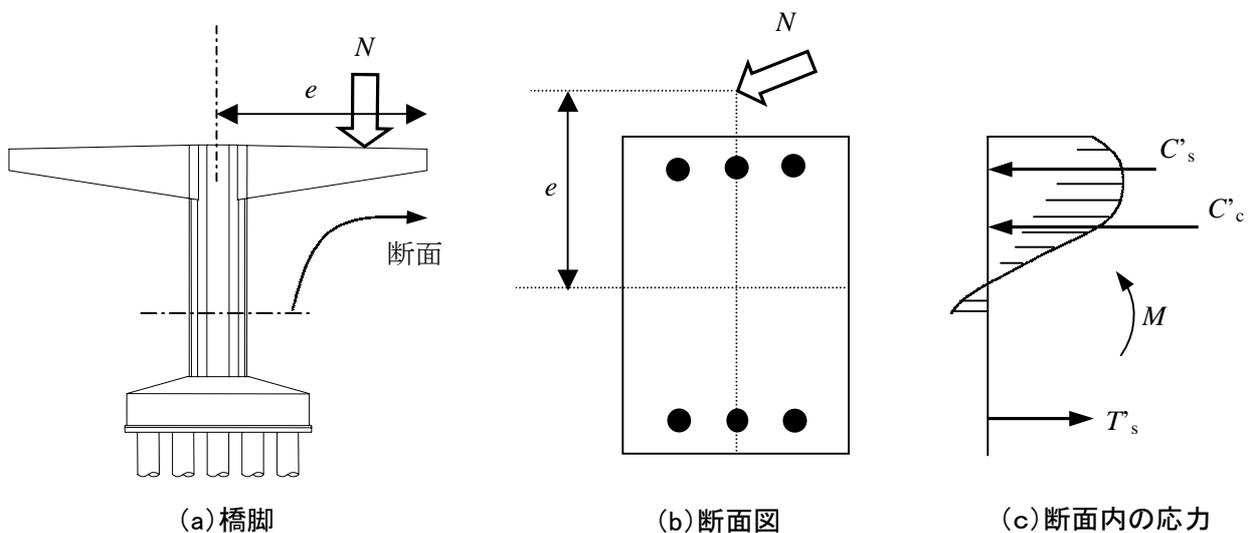


図 2-1 偏心荷重を受ける橋脚と断面解析

$$\text{モーメントの釣合い: } N = C'_c + C'_s + T'_s \quad (2.1)$$

$$\text{軸力の釣合い: } M = Ne \quad (2.2)$$

$M$  : 曲げモーメント

$N$  : 軸力

$e$  : 偏心距離

$C'_c$  : コンクリートの圧縮合力

$C'_s$  : 圧縮鉄筋の圧縮合力

$T'_s$  : 引張鉄筋の引張合力

図 2-2(a)のように荷重を作用すると内応力が生じ図 2-2(b), 図 2-2(c)のような曲げモーメント分布, 曲率分布が得られる. また, 各限界状態の曲率分布の定義は図 2-3 のように示される.

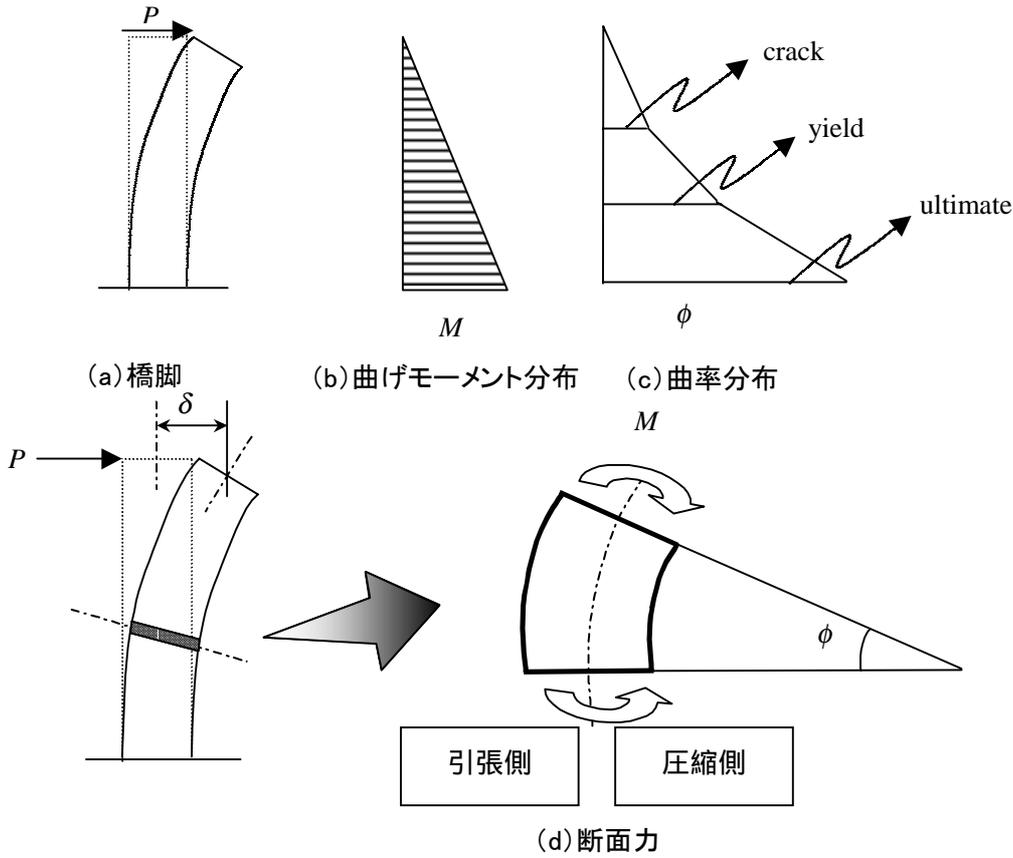


図 2-2 曲げモーメント, 曲率分布

次に, 各限界状態 (crack, yield, ultimate) のひずみ分布の定義を図 2-3 に示す.

c (crack): 引張コンクリートのかぶり部分にひび割れが生じる状態を示す

y (yield): 引張鉄筋のひずみが引張降伏ひずみに達した状態を示す

u (ultimate): Tri-linear 型圧縮コンクリート縁のひずみが圧縮終局ひずみに達した状態を示す

: Tetra-linear 型圧縮コンクリートのかぶり部分が圧壊した状態を示す.

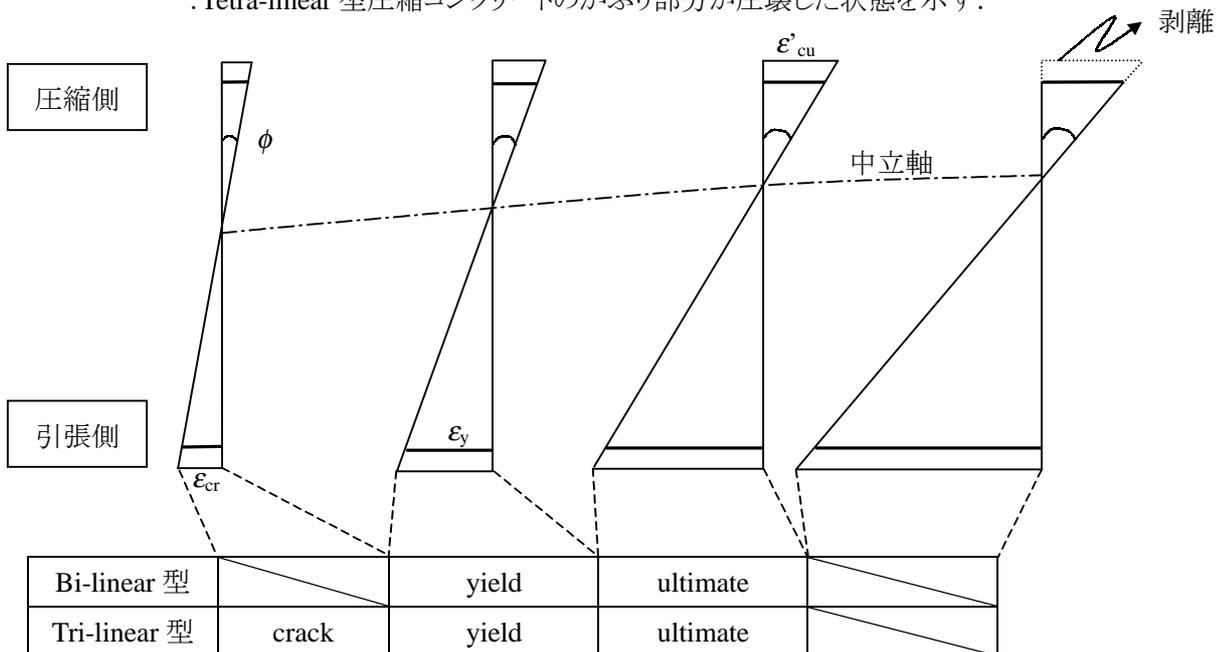


図 2-3 各限界状態のひずみ分布

Tetra-linear 型	crack	yield	maximum	ultimate
----------------	-------	-------	---------	----------

骨格曲線は一般に図 2-4 のような 3 種類のモデルが用いられている. Bi-linear 型ではひび割れ点 (crack) を無視し, Tetra-linear 型では 4 折点の定義を必要とし, 解析時間がかかる. 一般的に最もよく使用されているのは Tri-linear 型である.

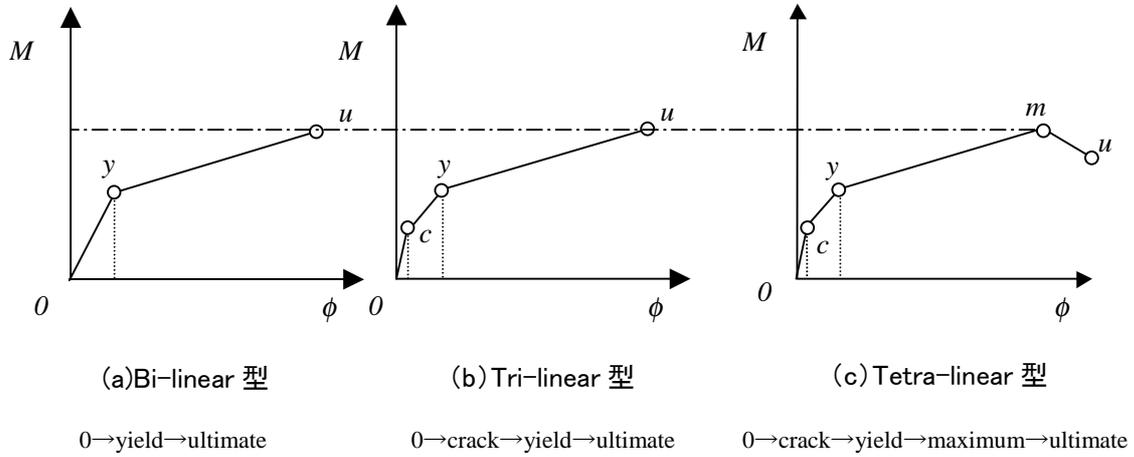
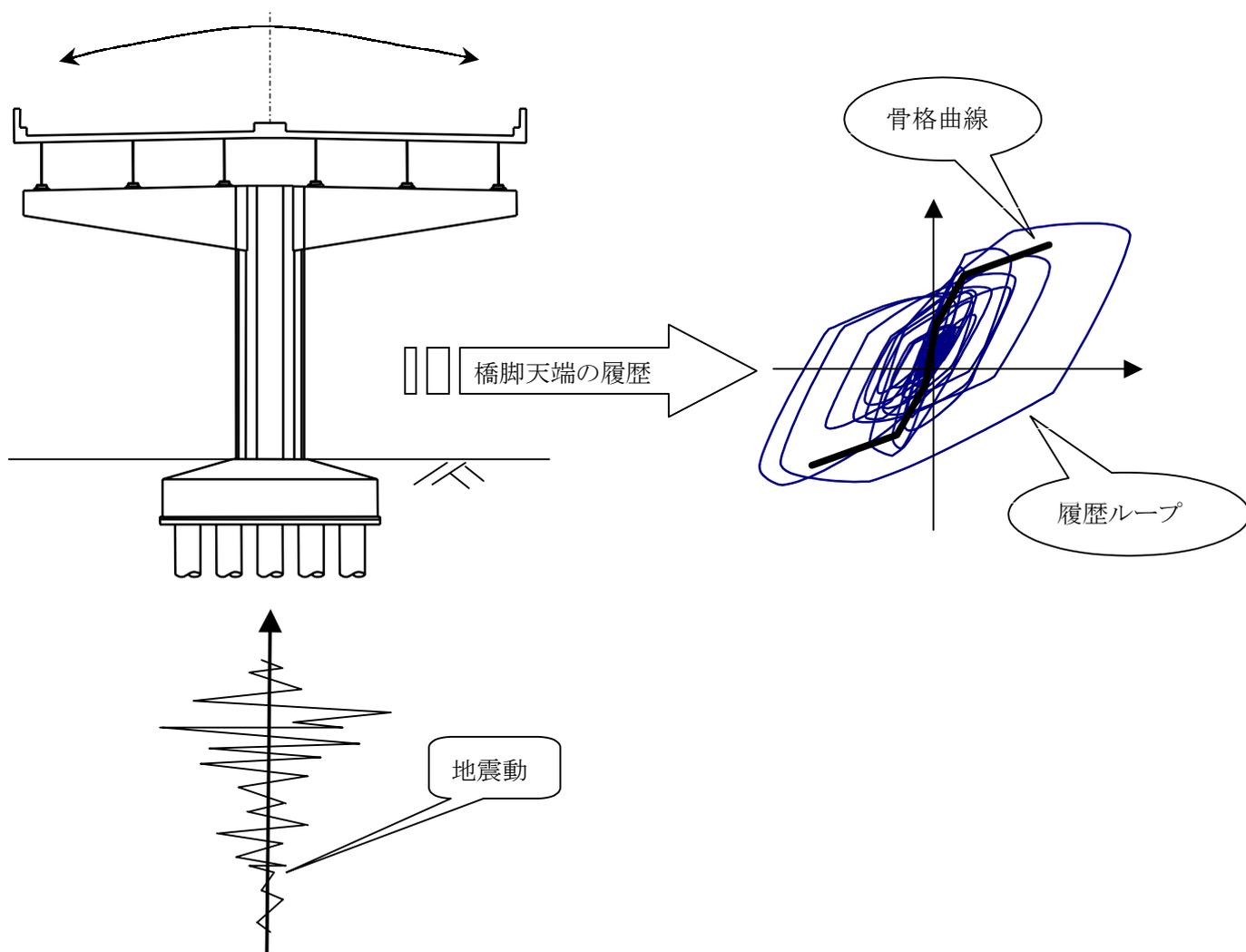


図 2-4 骨格曲線 ( $M-\phi$  関係)

## (2) 復元力モデルの特徴

復元力特性とは、構造物に作用する復元力と変形の関係によるものである。鉄筋コンクリート部材の復元力特性に関しては、コンクリートのひび割れ、鉄筋の降伏による剛性低下が生じる。繰返し载荷による大振幅のあとに、小振幅で载荷すると、大振幅時の損傷の影響を受けて小振幅時にも剛性が低下する。すなわち、鉄筋コンクリート部材の復元力特性は材料の損傷に伴う剛性変化とともに、荷重履歴によっても大きく左右される。

復元力特性は、骨格曲線と履歴特性により定義される。骨格曲線は、一般に鉄筋コンクリートの場合は、Tri-Linear 型(ひび割れ点、降伏点で剛性が変化)、Bi-Linear 型(ひび割れ点を省略し、降伏点で剛性が変化)で表記される(5. (1)参照)。



## Bi-Linear モデル

骨格曲線は降伏点で剛性が変わる 2 本の折れ線 (Bi-Linear) で定義される。Bi-Linear モデルにおいて再  
 載荷・除荷時の剛性  $k_r$  は次式により表されるが、通常載荷・除荷時の剛性は変化しない。  
 $\alpha=0$  とすると降伏時の剛性が、そのまま保持される。ここで、 $\alpha$  は通例 0 であることが多い。

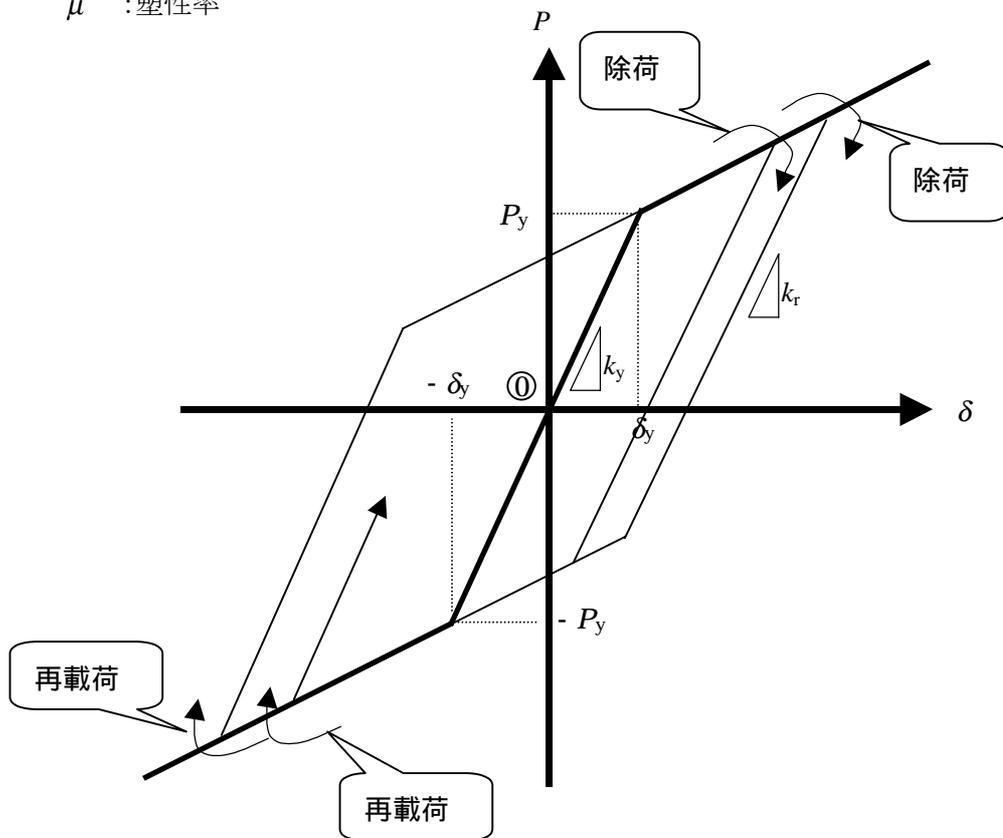
$$k_r = k_y \times \left| \frac{\delta_{\max}}{\delta_y} \right|^{-\alpha} \quad (2.3)$$

- $k_r$  : 再載荷・除荷時の剛性
- $k_y$  : 降伏剛性
- $\alpha$  : 除荷時剛性低下指数

また、等価粘性減衰定数  $h_{eq}$  が次式により表される。

$$h_{eq} = \frac{2(1-\beta)\{\mu - \mu^\alpha(1-\beta + \mu\beta)\}}{\pi\mu(1-\beta + \mu\beta)(1-\beta\mu^\alpha)} \quad (2.4)$$

- $\alpha$  : 除荷時剛性時低下指数
- $\beta$  : 降伏後剛性の初期剛性に対する比
- $\mu$  : 塑性率



載荷中: ① ~ ②, ④ ~ ⑥, ⑧ ~ ⑨  
 除荷中: ② ~ ④, ⑥ ~ ⑧

図 2-6 Bi-Linear モデル

### Tri-Linear モデル

降伏点より小さい振幅に対しては、Bi-Linear モデルと同じ履歴則に従い、降伏点を超えた骨格曲線上から除荷が始まると、その点が新しい降伏点となり、劣化した剛性により、Bi-Linear モデルの履歴則に従う。そこで、最大応答変位  $\delta_{\max}$  に伴い載荷・除荷時の剛性  $k_r$  と、等価粘性減衰定数  $h_{eq}$  は次式により表される。

$$k_r = k_y \times \left| \frac{\delta_{\max}}{\delta_y} \right|^{-\alpha} \quad (2.5)$$

- $k_r$  : 再載荷・除荷時の剛性
- $k_y$  : 降伏剛性
- $\alpha$  : 除荷時剛性低下指数

$$h_{eq} = \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{k_y}{k_0} \right) \frac{P_c}{P_y} \quad (2.6)$$

- $k_0$  : 初期剛性
- $k_y$  : 降伏剛性
- $P_c$  : ひび割れ点荷重
- $P_y$  : 降伏点荷重

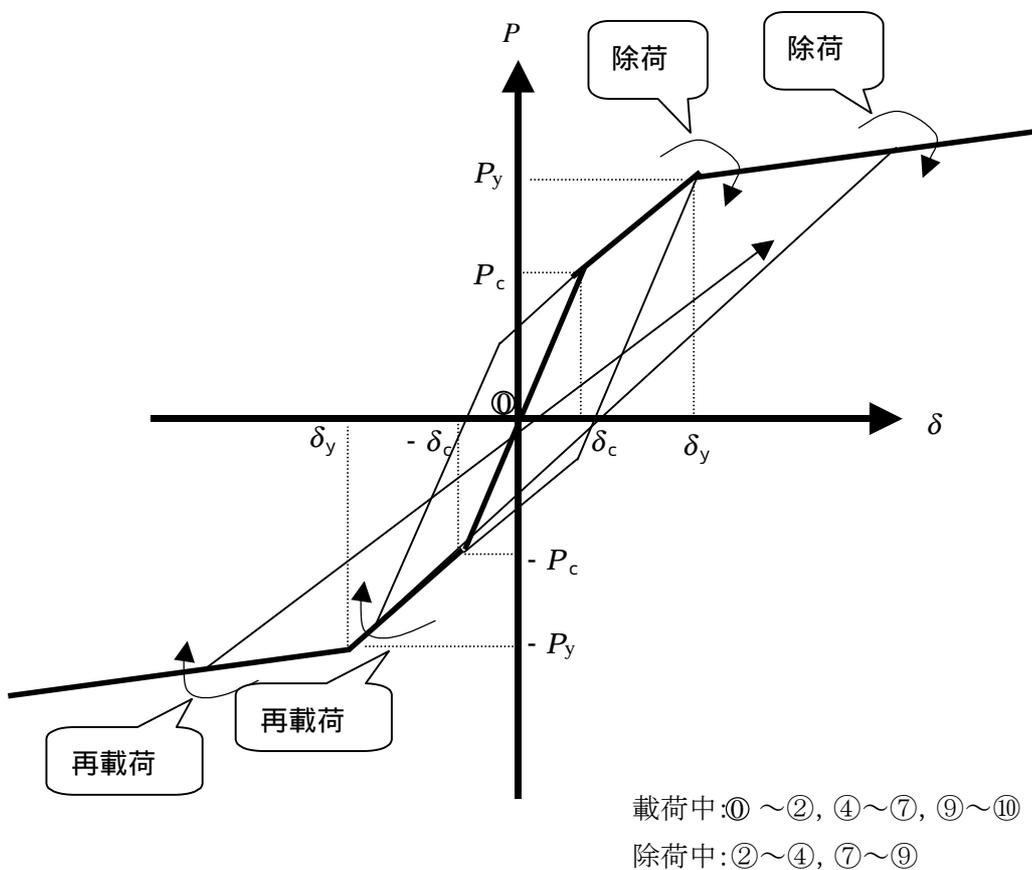


図 2-7 Tri-Linear モデル

## 武田モデル

武田モデルは、鉄筋コンクリート部材実験において観察される復元力特性を詳細にモデル化したものであり、次の点が考慮されている。

ひび割れによる剛性低下

②大振幅繰返し後の小振幅繰返しにおける加力時には、すぐ外側の履歴ループのピーク点を目指す。

③除荷時剛性  $k_r$  は、次式で定義される。

$$k_r = \frac{p_c + p_y}{\delta_c + \delta_y} \left| \frac{\delta_{\max}}{\delta_y} \right|^{-\alpha} \quad (2.7)$$

$(\delta_c, p_c)$  : ひび割れ点

$(\delta_y, p_y)$  : 降伏点

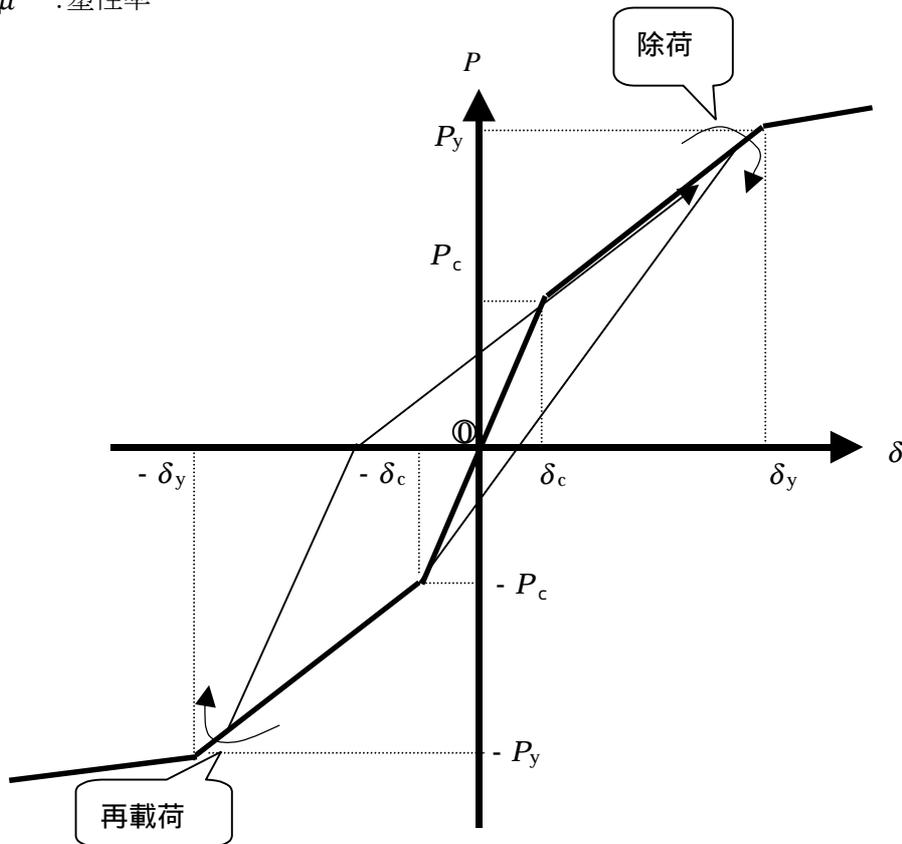
$\alpha$  : 除荷時剛性低下指数

また、等価粘性減衰定数  $h_{eq}$  が次式により表される。

$$h_{eq} = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1 + (\delta_c / \delta_y)}{1 + (p_c / p_y)} \mu^\alpha \frac{1 - \beta + \beta \mu}{\mu} \right\} \quad (2.8)$$

$\beta$  : 降伏後剛性の初期剛性に対する比

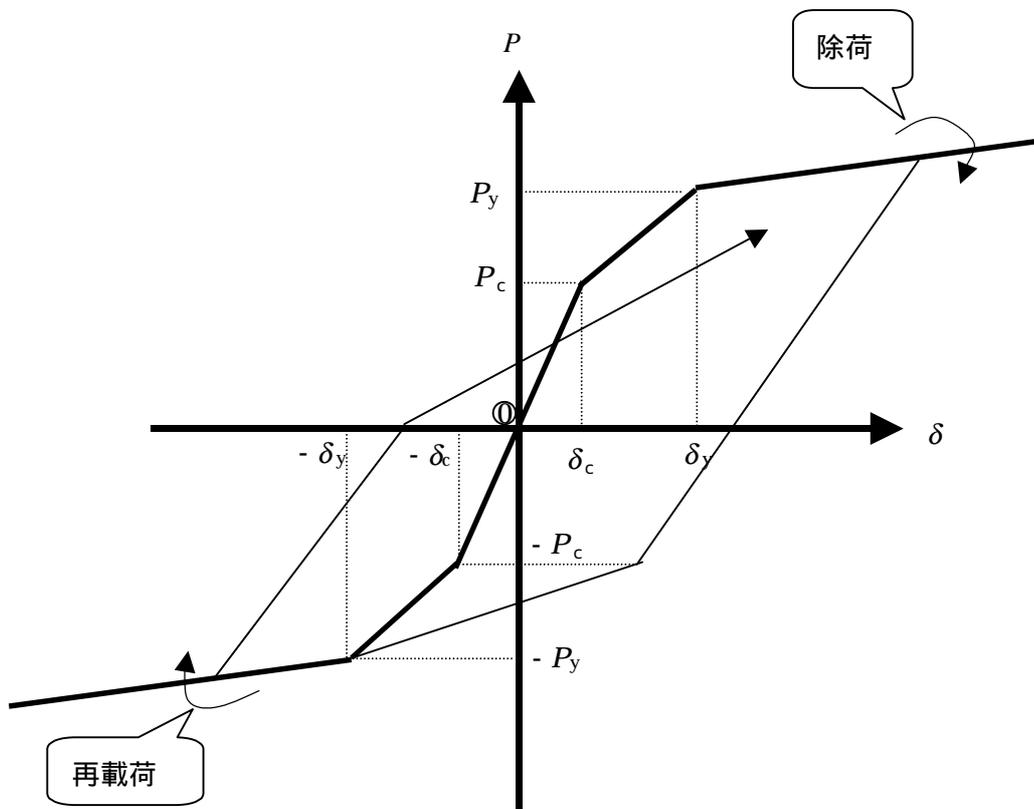
$\mu$  : 塑性率



載荷中: ① ~ , ~

除荷中: ~

図 2-8(a) 武田モデル(降伏前)



載荷中: ① ~ ③, ⑥ ~ ⑧

除荷中: ③ ~ ⑥

図 2-8(b) 武田モデル(降伏後)

### 3. 対象橋脚のモデル化

1 橋脚を解析対象とし、1 質点 1 自由度系モデル(橋脚基部から)を用い解析を行った。このモデルはシンプルであるため、解析時間が多質点モデルに比べ短いという利点があるが、算定結果が大き目に算出される。また、橋軸・橋軸直角方向で質点の位置が違うことに注意が必要である(道路橋示方書 V 耐震設計編 平成 8 年度)。参考までに、多質点多自由度系モデル(4 質点多接点モデル)を図 3-2 に示す。このモデルは、構造物の変形性能を細かく表現できるが、計算が複雑であるため解析時間がかかり、計算が発散する場合が多い。

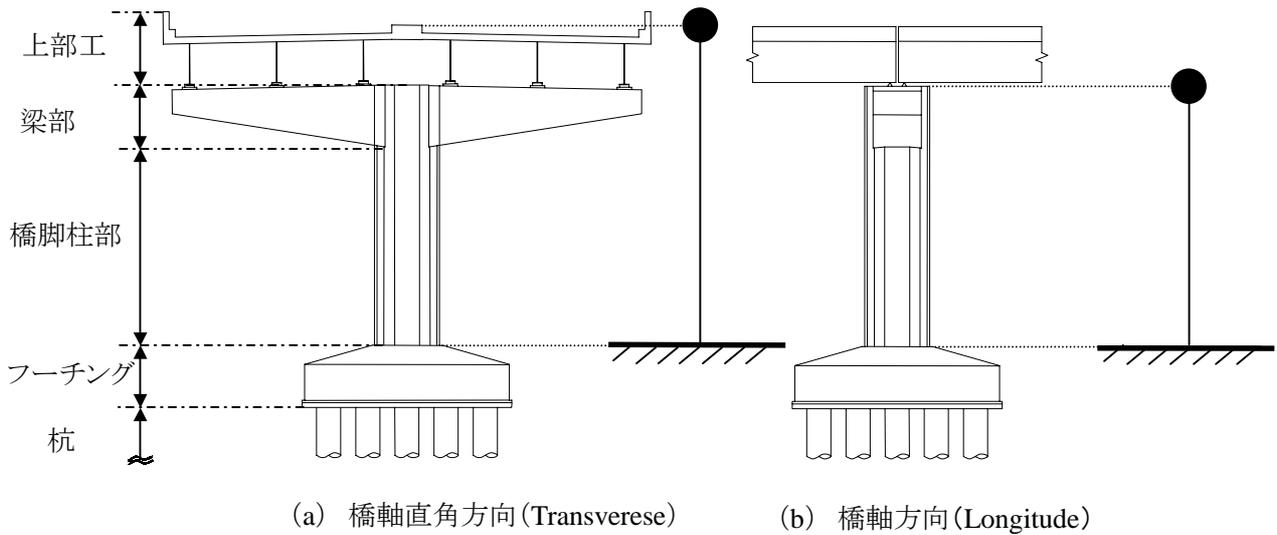


図 3-1 1 質点 1 自由度系モデル

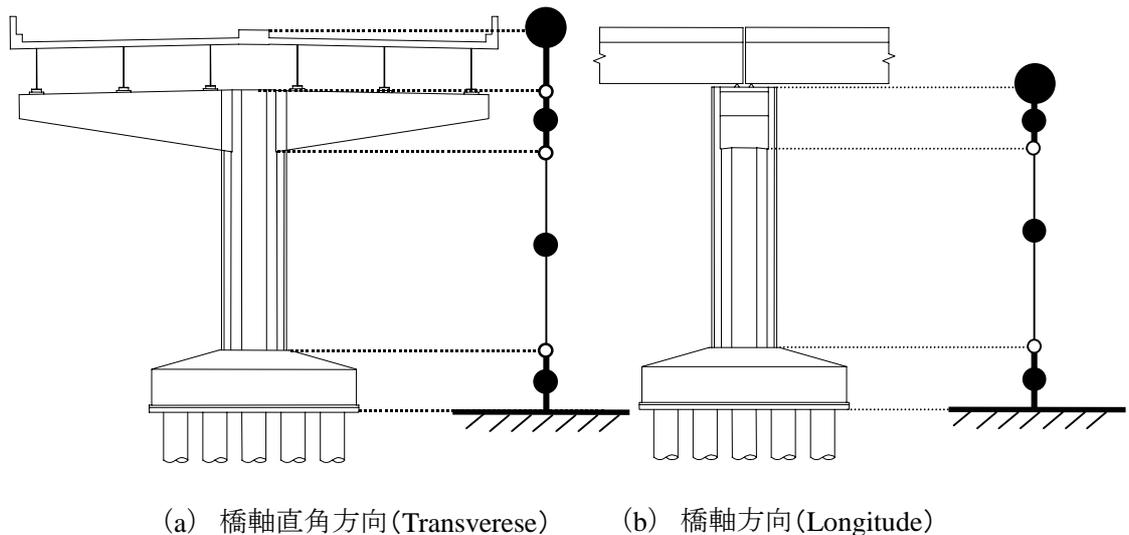


図 3-2 多質点多自由度系モデル(4 質点モデル)