# 振動工学の基礎 (1 質点 1 要素系の運動方程式)

武蔵工業大学 コンクリート研究室
近藤 由樹

***Key Words***
1 質点 1 自由度系, 自由振動, 減衰自由振動, 強制振動

## 1. はじめに

構造物の非線形動的特性を把握するには, 第一に線形動的特性を把握することが重要である. 線形動的特性を把握する上で, 振動問題で最も簡単な 1 質点 1 自由度系で考えるのが適当である.

1 質点 1 自由度系において, 平衡状態にある動的な系に外力が作用して振動が起こった後, 再び外力の作用を受けなくとも生ずる振動を自由振動という. 系の運動に無関係な外力の作用によって起きている振動を強制振動という. また, 系に作用する外力が一定の時間的変動を周期的に繰り返す場合, 系も周期的に一定の振動を繰り返す. このような振動を定常振動といい, そうでない場合を非定常振動という. 本論では, これらの振動問題について述べる.

## 2. 非減衰自由振動

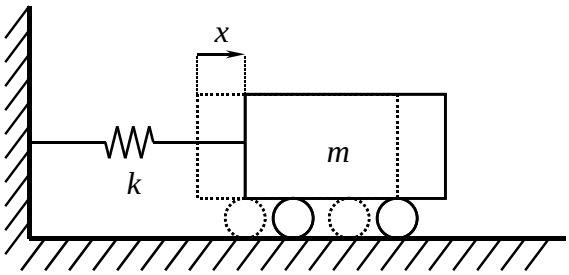



**図 2.1 非減衰自由振動**

質量 $m$, 剛性 $k$ を有する系の運動方程式 (非減衰自由振動) は次のように表される.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.1}$$

**式 (2.1)** の両辺を $m$ で除し,

$$\frac{k}{m} = \omega \tag{2.2}$$

とおくと, 次式が得られる.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2.3}$$

この一般解は微分方程式論より $C_1$, $C_2$ を任意定数として次のように求まる.

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \tag{2.4}$$

$$\dot{x} = -C_1\omega \sin\omega t + C_2\omega \cos\omega t \tag{2.5}$$

任意定数 $C_1$, $C_2$ は次の初期条件より求まる.

$$t = 0 \rightarrow x = x_0,\ \dot{x} = \dot{x}_0$$

$$C_1 = x_0,\ C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \tag{2.6}$$

したがって，**式 (2.3)** の特殊解は次のように表される

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t \tag{2.7}$$

また，次のように表すことも出来る．

$$x(t) = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}\ \sin(\omega t + \phi) \tag{2.7}$$

$$\dot{x}(t) = \omega\sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}\ \cos(\omega t + \phi) \tag{2.8}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}\ \sin(\omega t + \phi) \tag{2.9}$$

ただし，$\tan\phi = \dfrac{x_0}{\dot{x}_0/\omega}$

これより，質点 $m$ の運動は振幅が一定で，$\omega$を固有円振動数とする単弦振動である．また，$\phi$は位相角，または位相遅れと呼ばれるものである．以上より，1 質点 1 自由度系の非減衰自由振動は，固有円振動数$\omega$と，初期変位 $x_0$，初速度 $\dot{x}_0$ によって支配されていることが分かる．

周期 $T$ は 1 往復に必要な時間であり，その逆数は 1 秒間に往復する回数，すなわち振動数と呼ばれ $f$ で表す．$\omega$は円振動数と呼ばれるが，**式 (2.10)** で示したように構造物固有の定数である．質点の質量 $m$ とばねの剛性（ばね剛性）$k$ から算出されることから，固有円振動数とも呼ばれる．したがって，周期，振動数も同様に固有円振動数 $f$，固有周期 $T$ とも呼ばれ，これらをまとめて固有値と称している．

固有周期（sec）
$$T - \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.10}$$

固有振動数（Hz）
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.11}$$

固有円振動数（rad/sec）
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.12}$$

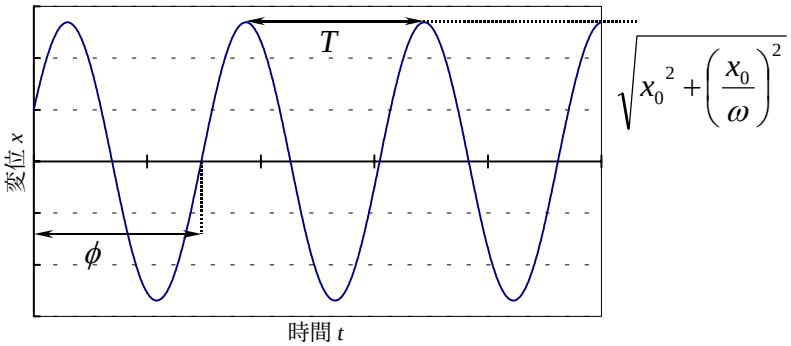
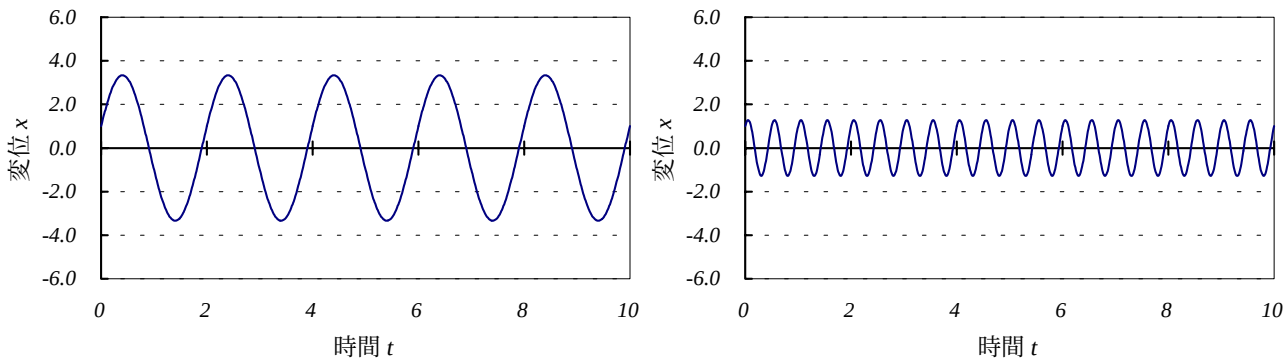



**図 2.2 変位応答（非減衰自由振動）**




$T$=2.0　　$T$=0.5

**図 2.3 時刻歴応答変位（非減衰自由振動）**

## 3. 減衰自由振動

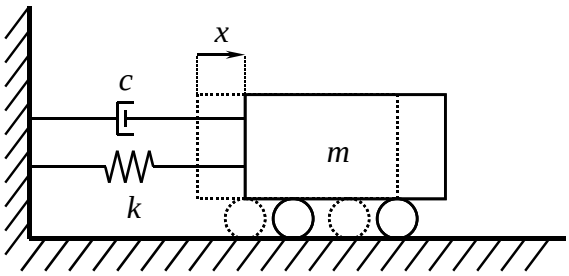



**図 減衰自由振動**

質量$m$, 粘性減衰定数 $c$, 剛性 $k$ を有する系の運動方程式（減衰自由振動）は次のように表される.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{3.1}$$

**式（3.2）**の両辺を $m$ で除し,

$$\frac{k}{m} = \omega\,,\quad \frac{c}{m} = 2h\omega \tag{3.2}$$

とおくと次式が得られる.

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.3}$$

この方程式を解くには微分方程式論より, 解を次のように仮定することによって得られる.

$$x = e^{\lambda t} \tag{3.4}$$

$\dot{x}$, $\ddot{x}$ も次のように表される.

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \tag{3.5}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t} \tag{3.6}$$

これらを**式（3.3）**に代入すると,

$$\left(\lambda^2 + 2h\omega\lambda + \omega^2\right)e^{\lambda t} = 0 \tag{3.7}$$

$\lambda$=0 の時は振動しないことより,

$$\lambda^2 + 2h\omega\lambda + \omega^2 = 0 \tag{3.8}$$

これを特性方程式と呼び, $\lambda$は次のようにもとまる.

$$\lambda_1,\ \lambda_2 = -h\omega \pm \omega\sqrt{h^2 - 1} \tag{3.9}$$

**式 (3.3)** の一般解は，微分方程式論より $C_1$，$C_2$ を任意定数として次のように求まる．

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{3.10}$$

(i) $h^2$-1≧0 の場合 ($h$≧1)

$\lambda_1$，$\lambda_2$ が相違なる実数となり，変位 $x$ は指数関数となり振動しない．

(ii) $h^2$-1<0 の場合 ($h$<1)

**式 (3.9)** の根号内は負の値となるので，次のように表す．

$$\lambda_1 = -h\omega + i\omega\sqrt{1-h^2} \tag{3.11}$$

$$\lambda_2 = -h\omega - i\omega\sqrt{1-h^2} \tag{3.12}$$

ここで，$a$，$b$ を次のように定義すると，$\lambda_1$，$\lambda_2$ は次のように表される．

$$a = h\omega \tag{3.13}$$

$$b = \omega\sqrt{1-h^2} \tag{3.14}$$

$$\lambda_1 = -a + ib \tag{3.15}$$

$$\lambda_2 = -a - ib \tag{3.16}$$

一般解は次のように表される．

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{(-a+ib)t} + C_2 e^{(-a-ib)t} \\ &= e^{-at}\left(C_1 e^{ibt} + C_2 e^{-ibt}\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

ここで，

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{3.18}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{3.19}$$

より一般解は次のようになる．

$$\begin{aligned} x &= e^{-at}\left\{(C_1 + C_2)\cos bt + i(C_1 - C_2)\sin bt\right\} \\ &= e^{-at}\left(C_3 \cos bt + C_4 \sin bt\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\dot{x} = e^{-at}\left\{(bC_4 - aC_3)\cos bt - (bC_3 + aC_4)\sin bt\right\} \tag{3.21}$$

ここで，初期条件より任意定数 $C_3$，$C_4$ を求めることができる．

$$t = 0 \rightarrow x = 0,\ \dot{x} = \dot{x}_0$$

$$C_3 = 0,\ C_4 = \frac{\dot{x}_0}{b} \tag{3.22}$$

となり，特殊解は次のように表される．

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{b} e^{-at} \sin bt \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}_0 e^{-at}\left(\cos bt - \frac{a}{b}\sin bt\right) \\ &= \dot{x}_0 \sqrt{(a/b)^2 + 1} e^{-at} \sin(bt - \phi) \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\ddot{x}(t) = \dot{x}_0 \sqrt{(a/b)^2 + 1} e^{-at} \left\{b\cos(bt - \phi) - a\sin(bt - \phi)\right\}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{b} \dot{x}_0 e^{-at} \sin(bt - 2\phi) \tag{3.25}$$

ただし，$a = h\omega$，$b = \omega\sqrt{1-h^2}$，$\tan\phi = \dfrac{b}{a}$

減衰の大きさは運動方程式の減衰項の係数 $c$ によって表される．$c$ は明らかに（力/速度）の次元をもっている．しかし系全体の減衰を表す場合には，むしろ

$$h = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \tag{3.26}$$

で定義される無次元量が多く用いられ，これを減衰定数と呼んでいる．

すなわち，$h^2$-1=0 の時，振動するかどうかの境目にあたり，これを臨界減衰と呼んでいる．臨界減衰は次のように表される．

$$c_c = 2\sqrt{mk} \tag{3.27}$$

減衰定数 $h$ はこの臨界減衰に対する比（臨界減衰比）を意味する．

$$h = \frac{c}{c_c} \tag{3.28}$$

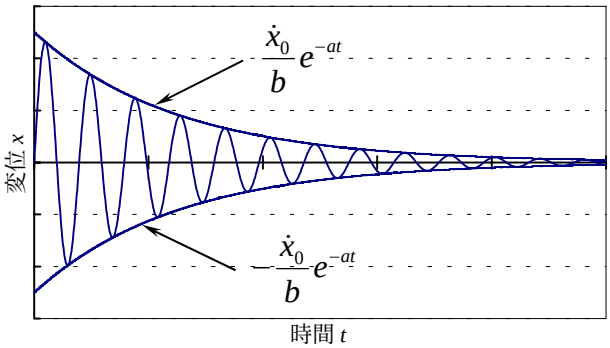
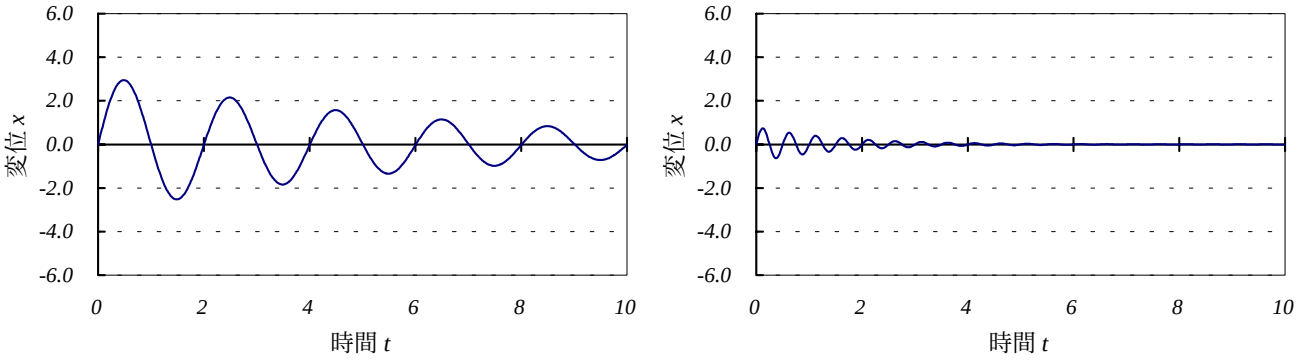



**図 3.2 変位応答（減衰自由振動）**




$T$=2.0　　$T$=0.5

**図 3.3 時刻歴応答変位（減衰自由振動）**

## 4. 正弦波外力による強制振動

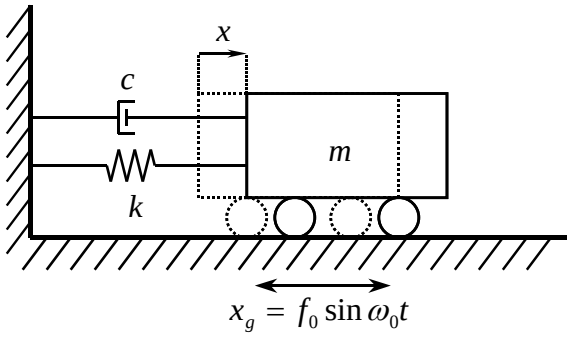



**図 4.1 正弦波による強制振動**

外力のうち最も簡単なものは，一定の振幅で作用する正弦波外力である．地震外力の変位を振幅 $f_0$，円振動数$\omega_0$ の正弦波である場合を考えると，

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g \tag{4.1}$$

$$x_g = f_0 \sin \omega_0 t \tag{4.2}$$

$$\ddot{x}_g = -f_0 \omega_0{}^2 \sin \omega_0 t \tag{4.3}$$

と表すことができる．これを**式 (4.1)** に代入すると，

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m f_0 \omega_0{}^2 \sin \omega_0 t \tag{4.4}$$

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = f \sin \omega_0 t \tag{4.5}$$

ただし，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$h = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$，$f = f_0 \omega_0{}^2$ (4.6)

このような微分方程式の解は，微分方程式論より，右辺を 0 とおいた同次方程式 (減衰自由振動) の一般解 $x_t$ (t) とこの式を満足する特殊解 (定常振動) $x_s$ (t) との和で与えられる．すなわち，

$$x(t) = x_s(t) + x_t(t) \tag{4.7}$$

### 4. 1 同次方程式 (減衰自由振動)

前節より，同次方程式の一般解は次のようになる．

$$x_t(t) = e^{-h\omega t}\left(C_1 \cos \omega\sqrt{1-h^2}\,t + C_2 \sin \omega\sqrt{1-h^2}\,t\right) \tag{4.8}$$

### 4. 2 特殊解 (定常振動)

定常振動解は，外力と同じ振動数を持つことを予想し，$x$ を次のように仮定する．

$$x_s(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \tag{4.9}$$

$$\dot{x}_s(t) = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t \tag{4.10}$$

$$\ddot{x}_s(t) = -C_1 \omega_0{}^2 \cos \omega_0 t - C_2 \omega_0{}^2 \sin \omega_0 t \tag{4.11}$$

これらを**式 (4.5)** に代入すると，

$$\left\{2h\omega\omega_0 C_2 + \left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)C_1\right\}\cos \omega_0 t + \left\{\left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)C_2 - 2h\omega\omega_0 C_1\right\}\sin \omega_0 t = f \sin \omega_0 t \tag{4.12}$$

$$2h\omega\omega_0 C_2 + \left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)C_1 = 0 \tag{4.13}$$

$$\left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)C_2 - 2h\omega\omega_0 C_1 = f \tag{4.14}$$

$$C_1 = \frac{2h\omega\omega_0 f}{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2h\omega\omega_0\right)^2} \tag{4.15}$$

$$C_2 = \frac{f\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)}{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2h\omega\omega_0\right)^2} \tag{4.16}$$

これらを**式 (4.9)** に代入すると,

$$x_s(t) = \frac{f}{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2h\omega\omega_0\right)^2}\left\{-2h\omega\omega_0 \cos\omega_0 t + \left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)\sin\omega_0 t\right\} \tag{4.17}$$

次のようにも表すこともできる.

$$x_s(t) = \frac{f_0 {\omega_0}^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2h\omega\omega_0\right)^2}}\sin\left(\omega_0 t - \phi\right)$$

$$= x_0 \sin\left(\omega_0 t - \phi\right) \tag{4.18}$$

ただし, $x_0 = \dfrac{f_0 {\omega_0}^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2h\omega\omega_0\right)^2}}$ (4.19)

$$\tan\phi = \frac{2h\omega_0/\omega}{1 - {\omega_0}^2/\omega^2}$$

## 4. 3 理論解

正弦波外力を受けるときの強制振動の一般解は,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m f_0 {\omega_0}^2 \sin\omega_0 t \tag{4.20}$$

$$x(t) = x_s(t) + x_t(t) \tag{4.21}$$

$$x(t) = e^{-at}\left(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt\right) + x_0 \sin\left(\omega_0 t - \phi\right) \tag{4.22}$$

$$\dot{x}(t) = e^{-at}\left\{\left(bC_2 - aC_1\right)\cos bt - \left(bC_1 + aC_2\right)\sin bt\right\} + \omega_0 x_0 \cos\left(\omega_0 t - \phi\right) \tag{4.23}$$

ここで, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $h = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$, $a = h\omega$, $b = \omega\sqrt{1-h^2}$, $f = f_0 {\omega_0}^2$

$$x_0 = \frac{f_0 {\omega_0}^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2h\omega\omega_0\right)^2}}, \quad \tan\phi = \frac{2a\omega_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2} \tag{4.24}$$

である. 初期条件 $t = 0 \rightarrow x = 0$, $\dot{x} = 0$ のとき,

$$C_1 = f_0 {\omega_0}^2 \cdot \frac{2a\omega_0}{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2a\omega_0\right)^2} \tag{4.25}$$

$$C_2 = f_0 {\omega_0}^2 \cdot \frac{\omega_0}{b} \cdot \frac{\left(2a^2 - \omega^2 + {\omega_0}^2\right)}{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2a\omega_0\right)^2} \tag{4.26}$$

以上より,

$$x(t) = \frac{f_0 {\omega_0}^3}{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2a\omega_0\right)^2} e^{-at}\left\{2a\cos bt + \frac{1}{b}\left(2a^2 - \omega^2 + {\omega_0}^2\right)\sin bt\right\} + x_0 \sin\left(\omega_0 t - \phi\right) \tag{4.27}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{f_0 {\omega_0}^3}{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2a\omega_0\right)^2} e^{-at}\left\{\left(2a^2 - \omega^2 + {\omega_0}^2\right)\cos bt - 2ab\sin bt\right\} + \omega_0 x_0 \cos\left(\omega_0 t - \phi\right) \tag{4.28}$$

$$\ddot{x}(t)=\frac{-f_0\omega_0{}^3 b}{\left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)^2+\left(2a\omega_0\right)^2}e^{-at}\left\{2ab\cos bt+\left(2a^2-\omega^2+\omega_0{}^2\right)\sin bt\right\}-\omega_0{}^2 x_0\sin\left(\omega_0 t-\phi\right) \tag{4.29}$$

ただし，$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$h=\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$，$a=h\omega$，$b=\omega\sqrt{1-h^2}$，$f=f_0\omega_0{}^2$

$$x_0=\frac{f_0\omega_0{}^2}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)^2+\left(2h\omega\omega_0\right)^2}}，\quad \tan\phi=\frac{2a\omega_0}{\omega^2-\omega_0{}^2} \tag{4.30}$$

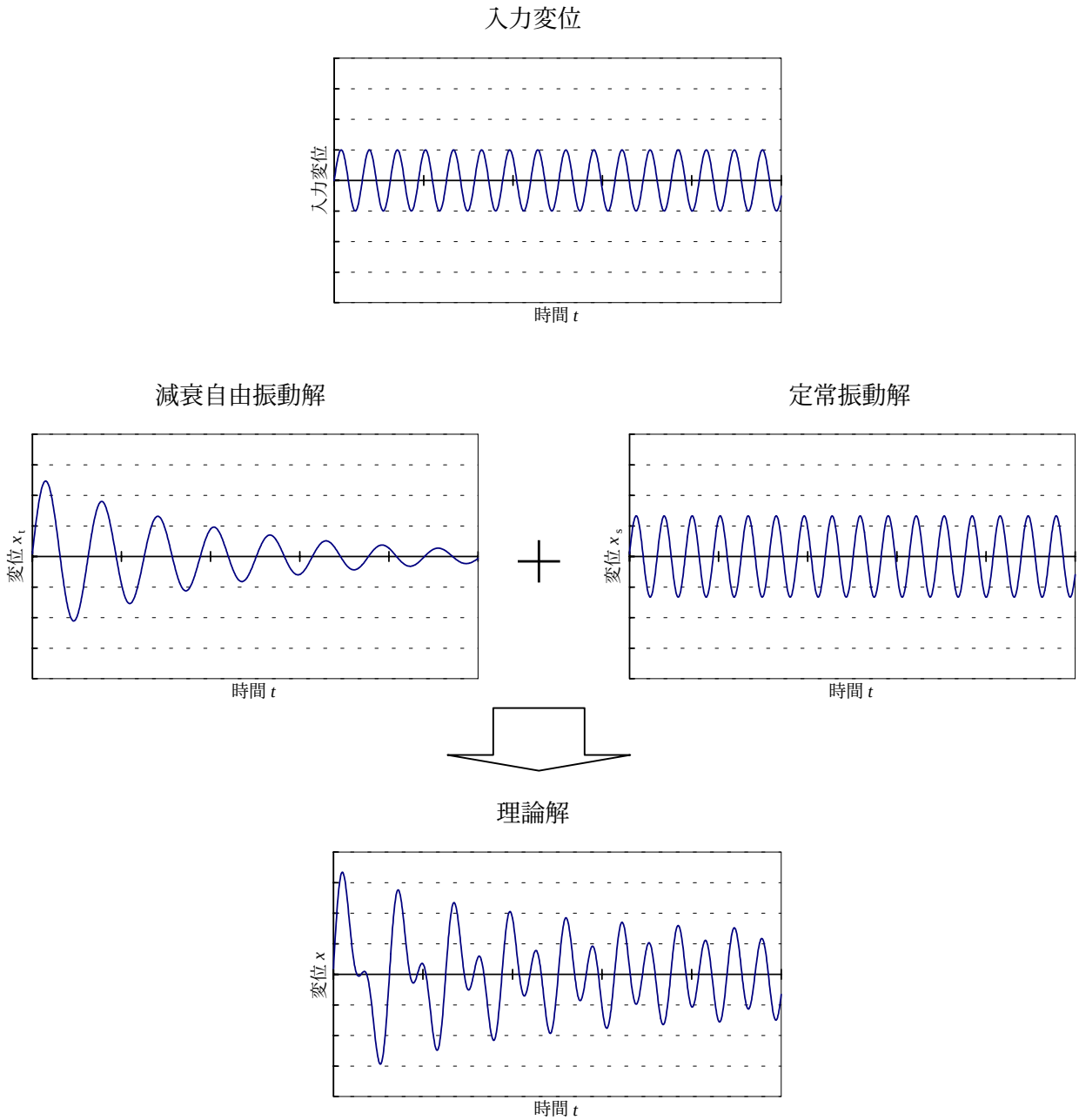



**図 4.2 変位応答（強制振動）**

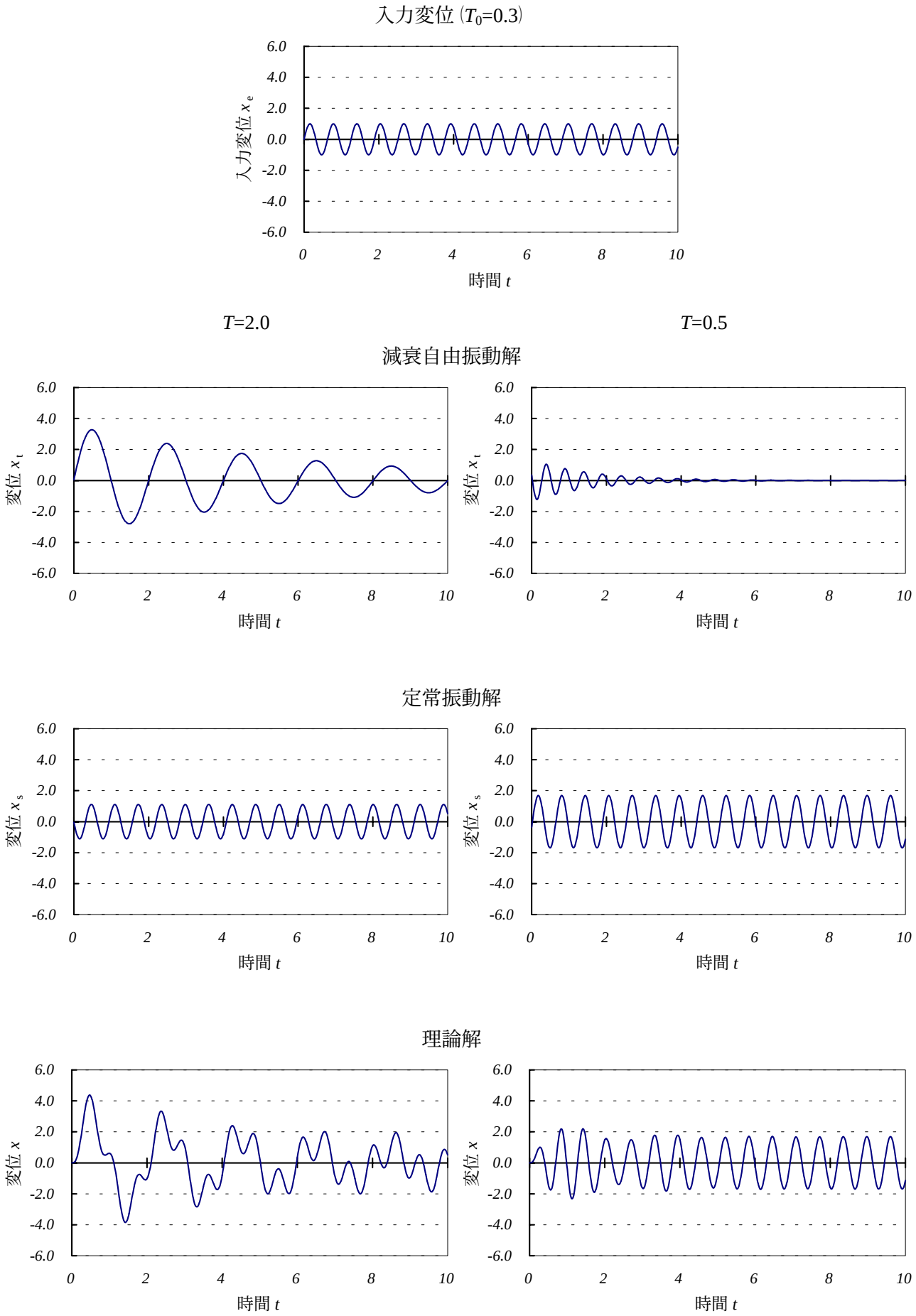



**図 4.3 時刻歴応答変位 (正弦波による強制振動)**

## 5. 伝達関数

外力 $x_g = f_0 \sin\omega_0 t$ の代わりに，複素外力 $x_g = f_0 e^{i\omega_0 t}$ を用いて考えてみる．

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g \tag{5.1}$$

$$x_g = f_0 e^{i\omega_0 t} \tag{5.2}$$

$$\ddot{x}_g = -f_0 {\omega_0}^2 e^{i\omega_0 t} \tag{5.3}$$

と表すことができる．これを**式 (5.1)** に代入すると，

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m f_0 {\omega_0}^2 e^{i\omega_0 t} \tag{5.4}$$

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = f e^{i\omega_0 t} \tag{5.5}$$

ただし，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$h = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$，$f = f_0 {\omega_0}^2$ (5.6)

前節より，この微分方程式の解は，右辺を 0 とおいた同次方程式（減衰自由振動）の一般解 $x_t(t)$ とこの式を満足する特殊解（定常振動）$x_s(t)$ との和で与えられる．ここでは，定常振動解のみを考えることにする．

定常振動解は，外力と同じ振動数を持つことを予想し，$x_s(t)$ を次のように仮定する．

$$x_s(t) = C e^{i\omega_0 t} = f_0 \cos\omega_0 t + i f_0 \sin\omega_0 t \tag{5.7}$$

$$\dot{x}_s(t) = i\omega_0 C e^{i\omega_0 t} \tag{5.8}$$

$$\ddot{x}_s(t) = -{\omega_0}^2 C e^{i\omega_0 t} \tag{5.9}$$

ここで，$C$ は複素振幅とよばれるものである．複素振幅は実部と虚部の 2 つの値を含み，振幅の絶対値と位相差の両方を同時に表現できるものである．複素振幅には次のようなことが成立っている．

$$C = C_R + C_I \cdot i = \sqrt{{C_R}^2 + {C_I}^2} \cdot e^{i\theta}$$

$$= \sqrt{{C_R}^2 + {C_I}^2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

$$\tan\theta = \frac{C_I}{C_R}$$

**式 (5.7)** ～**式 (5.9)** を**式 (5.5)** に代入すると，

$$-{\omega_0}^2 C + 2h\omega\omega_0 C i + \omega^2 C = f \tag{5.10}$$

$$C = \frac{f}{\omega^2 - {\omega_0}^2 + 2h\omega\omega_0 i} \tag{5.11}$$

$$= \frac{f_0\omega_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + \left(2h\omega\omega_0\right)^2}} e^{i\theta} \tag{5.12}$$

ただし，$\tan C = \dfrac{-2h\omega\omega_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2}$

ここで，前節の**式 (4.19)** と**式 (5.12)** を比較してみると，次のような関係があることがわかる．

$$|C| = x_0 \tag{5.13}$$

$$\tan\theta = -\tan\phi \tag{5.14}$$

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1 \tag{5.15}$$

したがって，定常振動解は，

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \frac{f_0\omega_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)^2+\left(2h\omega\omega_0\right)^2}}e^{-i\theta}e^{i\omega_0 t} \\ &= x_0 e^{i(\omega_0 t-\theta)} \\ &= x_0\cos(\omega_0 t-\theta)+ix_0\sin(\omega_0 t-\theta) \end{aligned} \tag{5.16}$$

となり，実部は外力 $f_0\cos\omega_0 t$ に対する解を，虚部は $f_0\sin\omega_0 t$ に対する解を表している．

これは，時間 $t$=∞の時の定常振動における解である．応答倍率とは，入力波の揺れに対して質点の揺れが変位及び，加速度において何倍になるかを示す指標である．時節に示す $x/x_g$ は，支点の位置に対して質点の位置が相対的にどれだけ変位しているかを示すものである．また，$\ddot{x}+\ddot{x}_g/\ddot{x}_g$ は，支点の加速度の何倍になるかを示すものである．

また，変位及び絶対加速度は外力に対して $\theta$ だけ位相が遅れていることが分かる．静的の場合は，位相が遅れることはないが，動的の場合，減衰があることによって変位及び絶対加速度は外力よりも遅れが生じる．この位相遅れは，減衰の増大に伴い位相遅れも増大するが，共振時においては，減衰量によらず，$\pi/2$ となる．

## 5．1 相対変位応答倍率

**式 (5.7)** と**式 (5.12)** より，

$$\begin{aligned} x &= \frac{f}{\omega^2-\omega_0{}^2+2h\omega\omega_0 i}e^{i\omega_0 t} \\ &= \frac{f_0\omega_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)^2+\left(2h\omega\omega_0\right)^2}}e^{-i\theta}e^{i\omega_0 t} \\ &= \frac{\omega_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)^2+\left(2h\omega\omega_0\right)^2}}e^{-i\theta}\cdot x_g \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\frac{x}{x_g} = \frac{\omega_0/\omega}{\sqrt{\left(1-\omega_0{}^2/\omega^2\right)^2+\left(2h\omega_0/\omega\right)^2}}e^{-i\theta} \tag{5.18}$$

ただし，$\tan\theta = \dfrac{2h\omega_0/\omega}{1-\omega_0{}^2/\omega^2}$

ここで，$\omega = 2\pi f$ を用いて振動数で表してみると，

$$\frac{x}{x_g} = \frac{f_0/f}{\sqrt{\left(1-f_0{}^2/f^2\right)^2+\left(2hf_0/f\right)^2}}e^{-i\theta} \tag{5.19}$$

ただし，$\tan\theta = \dfrac{2hf_0 / f}{1 - f_0{}^2 / f^2}$

また．$f = 1/T$ を用いて固有周期で表してみると，

$$\frac{x}{x_g} = \frac{T / T_0}{\sqrt{\left(1 - T^2 / T_0{}^2\right)^2 + \left(2hT / T_0\right)^2}} e^{-i\theta} \tag{5.20}$$

ただし，$\tan\theta = \dfrac{2hT / T_0}{1 - T^2 / T_0{}^2}$

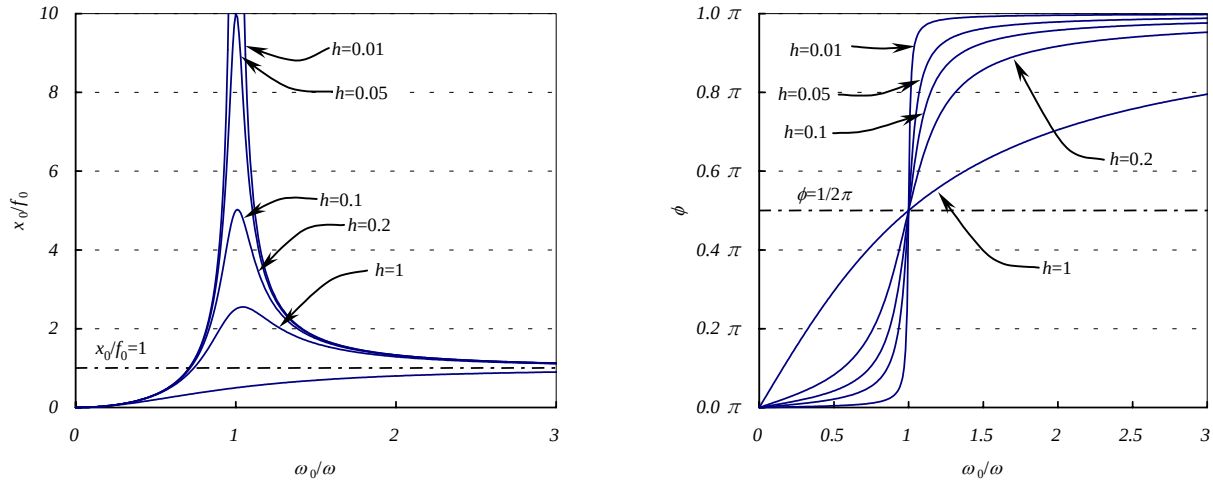



**図 5.1 変位応答倍率と位相角**

## 5．3 絶対加速度応答倍率

地震による慣性力は運動方程式より絶対加速度 $\ddot{x} + \ddot{x}_g$ と質量 $m$ の積で表される．

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{x}_g \tag{5.21}$$

$$\ddot{x} + \ddot{x}_g = -2h\omega\dot{x} - \omega^2 x \tag{5.22}$$

式 (), 式 () を代入すると，

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + \ddot{x}_g &= -\left(2h\omega\omega_0 i + \omega^2\right) C e^{i\omega_0 t} \\
&= -\left(2h\omega\omega_0 + \omega^2\right) x \\
&= \frac{-f_0\omega_0\left(2h\omega\omega_0 i + \omega^2\right)}{\omega^2 - \omega_0{}^2 + 2h\omega\omega_0 i} e^{i\omega_0 t} \\
&= \frac{2h\omega\omega_0 i + \omega^2}{\omega^2 - \omega_0{}^2 + 2h\omega\omega_0 i} \ddot{x}_g
\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{x} + \ddot{x}_g}{\ddot{x}_g} &= \frac{2h\omega\omega_0 i + \omega^2}{\omega^2 - \omega_0{}^2 + 2h\omega\omega_0 i} \\
&= \sqrt{\frac{1 + \left(2h\omega_0 / \omega\right)^2}{\left(1 - \omega_0{}^2 / \omega^2\right)^2 + \left(2h\omega_0 / \omega\right)^2}} \cdot e^{-i\theta}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

ただし，$\tan\theta = \dfrac{2h\left(\omega_0 / \omega\right)^3}{1 - \omega_0{}^2 / \omega^2\left(1 - 4h^2\right)}$

ここで，$\omega = 2\pi f$ を用いて振動数で表してみると，

$$\frac{\ddot{x}+\ddot{x}_g}{\ddot{x}_g} = \sqrt{\frac{1+(2hf_0/f)^2}{\left(1-f_0{}^2/f^2\right)^2+(2hf_0/f)^2}}\cdot e^{-i\theta} \tag{5.25}$$

ただし，$\tan\theta = \dfrac{2h(f_0/f)^3}{1-f_0{}^2/f^2(1-4h^2)}$

また．$f = 1/T$ を用いて固有周期で表してみると，

$$\frac{\ddot{x}+\ddot{x}_g}{\ddot{x}_g} = \sqrt{\frac{1+(2hT/T_0)^2}{\left(1-T^2/T_0{}^2\right)^2+(2hT/T_0)^2}}\cdot e^{-i\theta} \tag{5.26}$$

ただし，$\tan\theta = \dfrac{2h(T/T_0)^3}{1-T^2/T_0{}^2(1-4h^2)}$

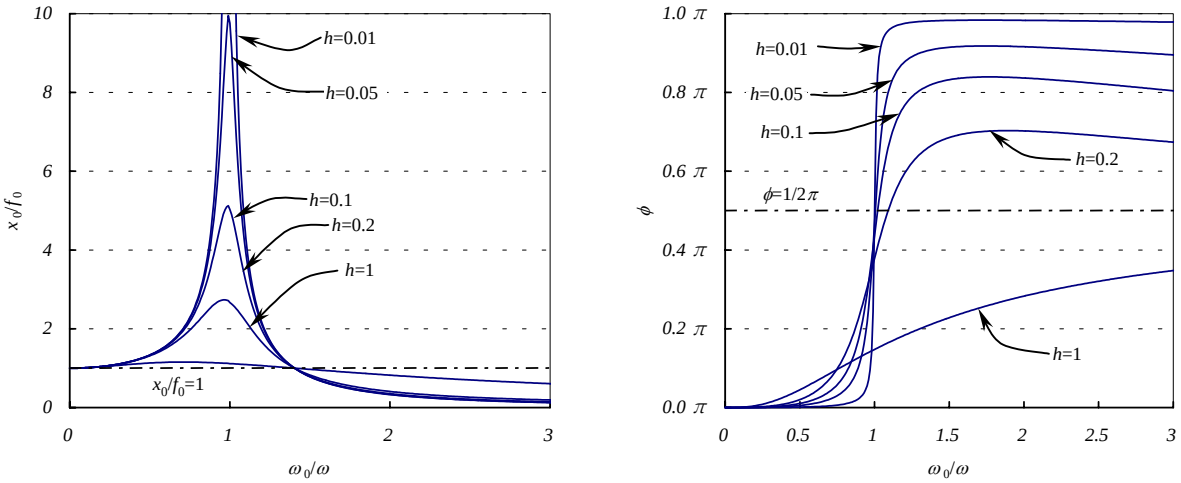



**図 5.2 絶対加速度応答倍率と位相角**

## 5．4 伝達関数

伝達関数とは，単位外力 $e^{i\omega_0 t}$ に対する複素応答振幅であり，周波数域における応答解析の基本となる量である．これは，周波数応答関数と呼ばれることもある．

$$\ddot{x}+2h\omega\dot{x}+\omega^2 x = fe^{i\omega_0 t} \tag{5.27}$$

$$x = \frac{f}{\omega^2-\omega_0{}^2+2h\omega\omega_0 i}e^{i\omega_0 t} \tag{5.28}$$

変位伝達関数を $H(i\omega)$ とすれば，単位複素外力 ($f$=1) に対する変位応答は，

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega^2-\omega_0{}^2+2h\omega\omega_0 i}e^{i\omega_0 t} \\ &= H(i\omega)e^{i\omega_0 t} \end{aligned} \tag{5.29}$$

したがって，変位伝達関数は次のように表される．

$$H(i\omega) = \frac{1}{\omega^2-\omega_0{}^2+2h\omega\omega_0 i} \tag{5.30}$$

## 6. 不規則外力による強制振動

不規則外力（地震）を受ける場合，外力は単純な式で表現することができない．しかし，外力を微小時間に分割し，それぞれの微小外力による自由振動を重ね合わせる方法，すなわち積分解を求める方法によって解を導くことができる．もう一つの方法として，運動方程式が常微分方程式であることより，離散化しコンピューターによって直接数値積分を行う方法である．直接数値積分を用いれば，弾性問題だけではなく非線形問題にまで応用が可能となる．

前者は，考案者の名前から Duhamel's 積分解としてしられ，弾性問題の理論解を導くことができる．後者の直接積分法としては地震応答解析によく用いられるものに，Newmark-$\beta$法がある．

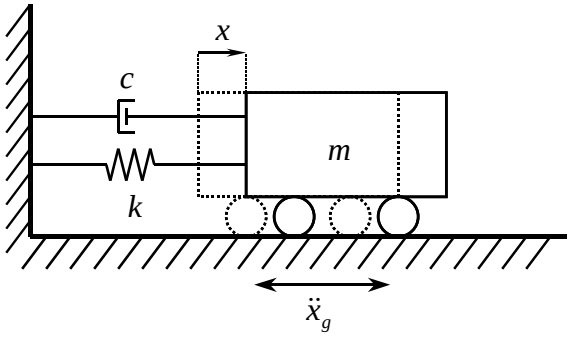



**図 6.1 不規則外力（地震）による強制振動**

図のように地盤が $\ddot{x}_e$ の加速度をもって動く時，慣性力は次のように表される．

$$-m(\ddot{x}+\ddot{x}_e) \tag{6.1}$$

一方，地震の場合，質点に作用する外力はなく，振動を支配する外力は慣性力である．したがって運動方程式は次のように表される．

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{x}_e \tag{6.2}$$

ここで，

$$\frac{k}{m}=\omega\,,\quad \frac{c}{m}=2h\omega \tag{6.3}$$

とすると，運動方程式は次のようにも表される．

$$\ddot{x}+2h\omega\dot{x}+\omega^2x=-\ddot{x}_e \tag{6.4}$$

### 6. 1 Duhamel's 積分解

Duhamel's 積分解の導出は，非常に高度な計算を必要とされるため，ここでは解のみを示す．

$$x(t)=\frac{-1}{\omega\sqrt{1-h^2}}\int_0^t\left\{\ddot{x}_e(\tau)e^{-h\omega(t-\tau)}\sin\left[\omega\sqrt{1-h^2}(t-\tau)\right]\right\}d\tau \tag{6.5}$$

### 6. 2 Newmark-$\beta$法による直接積分法

Newmark-$\beta$法において，時刻 $t+\Delta t$（ステップ $i$+1）での運動方程式は次のように表される．

$$m\ddot{x}_{i+1}+c\dot{x}_{i+1}+kx_{i+1}=-m\ddot{x}_{ei+1} \tag{6.6}$$

また，$i$+1 での変位と外力の増分を次のように表す．

$$x_{i+1}=x_i+\Delta x \tag{6.7}$$

$$-m\ddot{x}_{ei+1}=-m\ddot{x}_{ei}+\Delta F \tag{6.8}$$

Newmark-$\beta$法によって $i$+1 の速度と変位は次のように仮定される.

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2}\left(\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i\right) \tag{6.9}$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t\dot{x}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{x}_i + \beta\Delta t^2\ddot{x}_{i+1} \tag{6.10}$$

**式 (6.7)** を**式 (6.10)** に代入して $i$+1 の加速度を求める.

$$\ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(x_{i+1} - x_i\right) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_i \tag{6.11}$$

$$= \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left[\Delta x - \Delta t\dot{x}_i - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{x}_i\right] \tag{6.12}$$

**式 (6.11)** を**式 (6.9)** に代入して $i$+1 の速度を求める.

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{1}{2\beta\Delta t}\left(x_{i+1} - x_i\right) - \frac{1}{2\beta}\dot{x}_i - \left(\frac{1}{4\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{x}_i \tag{6.13}$$

$$= \frac{1}{2\beta\Delta t}\Delta x + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\dot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\Delta t\ddot{x}_i \tag{6.14}$$

**式 (6.7)**, **(6.8)**, **(6.11)**, **(6.12)** を運動方程式**式 (6.6)** に代入して整理すると, 次のように表される.

$$m\left\{\frac{1}{\beta\Delta t^2}\left[\Delta x - \Delta t\dot{x}_i - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{x}_i\right]\right\}$$
$$+ c\left\{\frac{1}{2\beta\Delta t}\Delta x + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\dot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\Delta t\ddot{x}_i\right\} + k\left(x_i + \Delta x\right) = -m\ddot{x}_{ei} + \Delta F \tag{6.15}$$

$$\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}m + \frac{1}{2\beta\Delta t}c + k\right)\Delta x$$
$$= \Delta F - m\ddot{x}_{ei} - \left(m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i\right) + m\left(\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_i + \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_i\right) + c\left[\frac{1}{2\beta}\dot{x}_i + \left(\frac{1}{4\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{x}_i\right] \tag{6.16}$$

ここで,

$$k_e = \frac{1}{\beta\Delta t^2}m + \frac{1}{2\beta\Delta t}c + k \tag{6.17}$$

とすれば, $i$+1 における変位は次式のように表される.

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{k_e}\left\{-m\ddot{x}_{ei+1} - \left(m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i\right) + m\left(\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_i + \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_i\right) + c\left[\frac{1}{2\beta}\dot{x}_i + \left(\frac{1}{4\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{x}_i\right]\right\} \tag{6.18}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{k_e}\left\{m\ddot{x}_{ei+1} + m\left[\left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{x}_i - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_i\right] + c\left[\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\Delta t\ddot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\dot{x}_i\right] + kx_i\right\} \tag{6.19}$$

以上より, **式 (6.6)** で表される運動方程式の $i$+1 における, 加速度, 速度, 変位は次のように表される.

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left[x_{i+1} - x_i - \Delta t\dot{x}_i - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{x}_i\right] \tag{6.20}$$

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{1}{2\beta\Delta t}\left(x_{i+1} - x_i\right) + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\dot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\Delta t\ddot{x}_i \tag{6.21}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{k_e}\left\{ m\ddot{x}_{ei+1} + m\left[\left(1-\frac{1}{2\beta}\right)\ddot{x}_i - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_i\right] + c\left[\left(1-\frac{1}{4\beta}\right)\Delta t\ddot{x}_i + \left(1-\frac{1}{2\beta}\right)\dot{x}_i\right] + kx_i \right\} \tag{6.22}$$

ただし,

$$k_e = \frac{1}{\beta\Delta t^2}m + \frac{1}{2\beta\Delta t}c + k \tag{6.23}$$

これによって順次加速度, 速度, 変位を求めていくことが出来る.

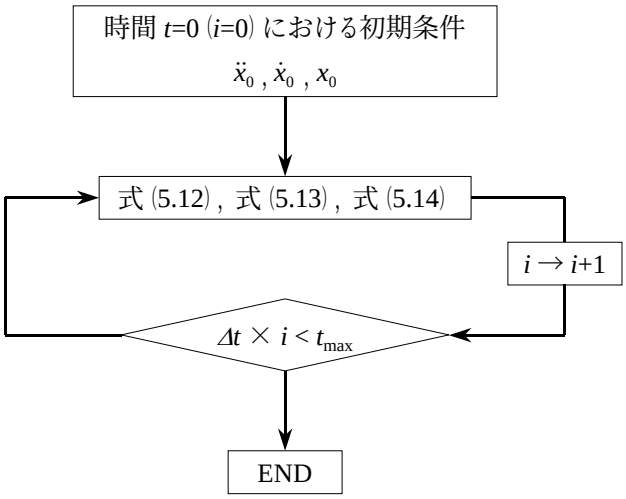
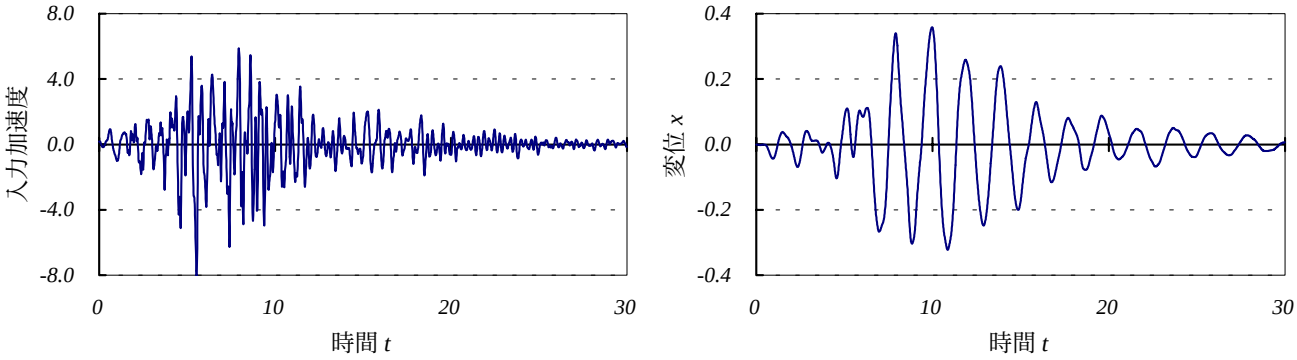



**図 6.2 計算フロー**

Newmark-$\beta$法において, $\beta$=1/8 の場合は段階加速度法, $\beta$=1/6 の場合は線形加速度法, $\beta$=1/4 の場合は平均加速度法と呼ばれ, この$\beta$の違いにより, 加速度の変化の仮定が異なることを意味する. $\beta$=1/8 とすれば加速度は微小区間$\Delta t$において, その中央で変化するものとし, $\beta$=1/6 とすれば線形, $\beta$=1/4 とすれば一定で時刻 $t$ と $t+\Delta t$ の平均値をとる.

また, 解の安定性と精度は$\beta$と時間刻み$\Delta t$ に依存しており, 時間刻み$\Delta t$ が荒い場合, $\beta$が大きいほど安定(発散しにくい)であるが精度が悪くなる. ただし$\beta$=1/4 の場合は線形問題においては, 絶対安定である.



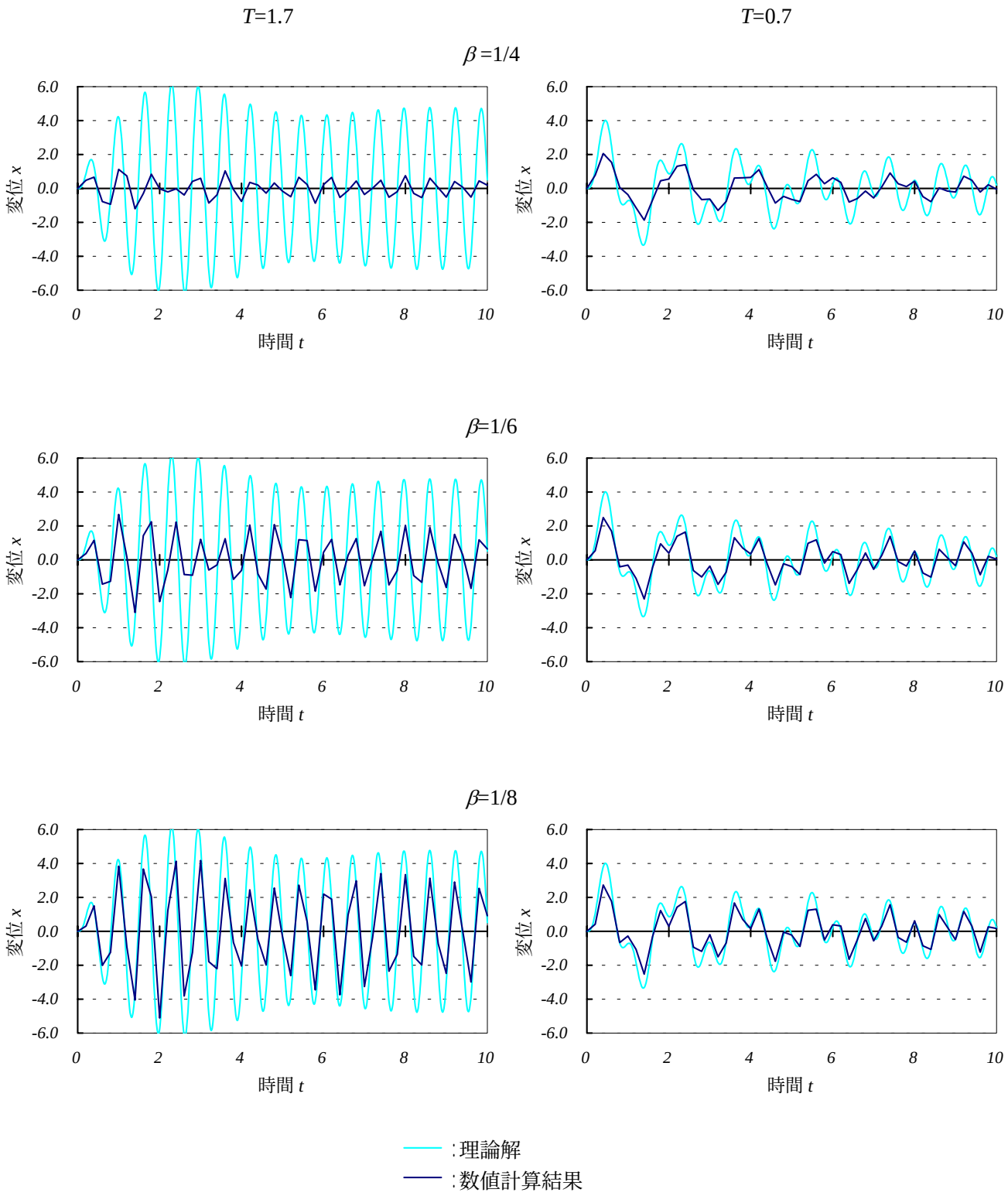

入力加速度　　応答変位

**図 6.3 時刻歴図 (不規則外力による強制振動)**

### 6．3 定数$\beta$の影響

Newmark-$\beta$法において，定数$\beta$の影響を比較してみた．

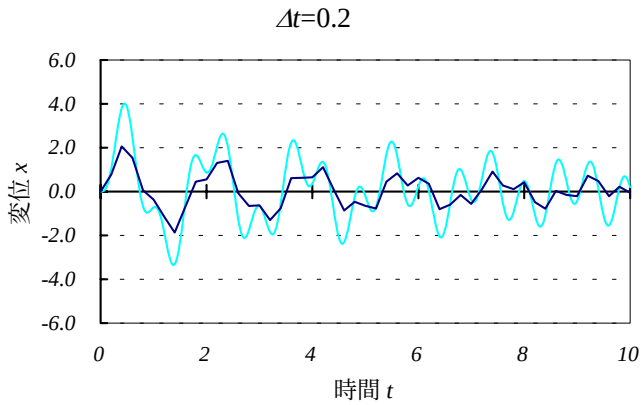
時間刻みは$\Delta t$=0.2 を用い，構造物の固有周期は $T$=1.7，0.7 で比較している．また，Newmark-b 法の定数は$\beta$=1/4，1/6，1/8 を用いている．図中には，Newmark-$\beta$法によって算出した結果と理論解を図示している．

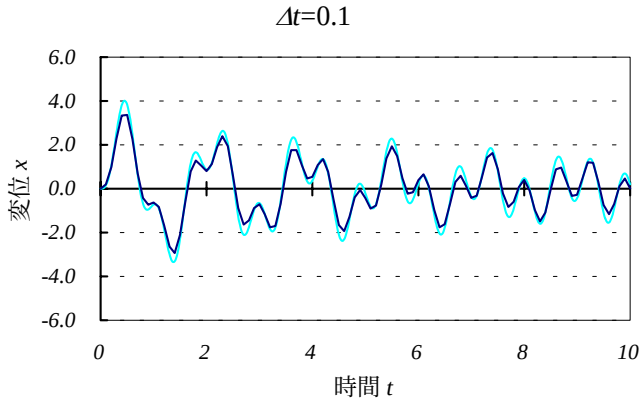


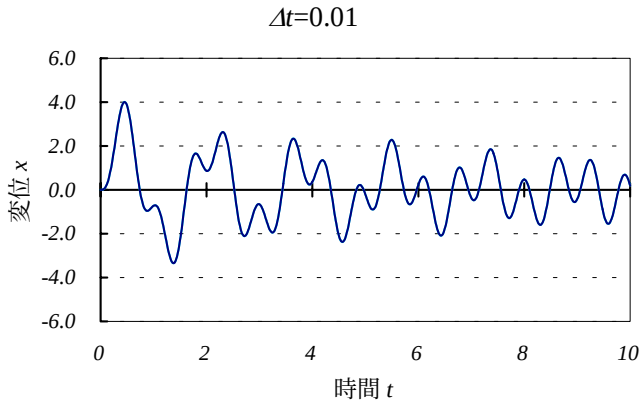
### 6．4 時間刻みの影響

Newmark-$\beta$法において，時間刻み$\Delta t$ の影響を比較してみた．

Newmark-$\beta$法の定数は$\beta$=1/4 を用い，時間刻みは$\Delta t$=0.2，0.1，0.01 で比較している．また，構造物の固有周期は $T$=1.7 である．図中には，Newmark-$\beta$法によって算出した結果と理論解を図示している．




：理論解
：数値計算結果

**【参考文献】**

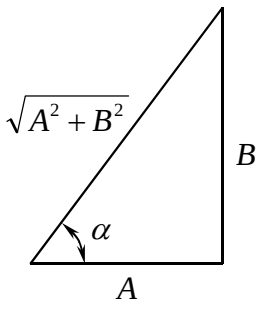
大崎 順彦：新・地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1994.5
平井 一男, 水田洋司：耐震工学入門, 森北出版, 1994.3
CRC 総合研究所：DYNA2E（立体骨組構造物の動的解析プログラム） 理論説明書
柴田 明徳：最新建築学シリーズ 9 最新 耐震構造解析, 森北出版, 1981.6

**付録**

$$y = A\sin x + B\cos x$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right)$$

ここで，$\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha$ とすると，$\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\alpha$ となる.




$$y = \sqrt{A^2+B^2}\left(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha\right)$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\,\sin\left(x+\alpha\right)$$

ただし，$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{B}{A}$

複素振幅

$$C = C_R + C_I \cdot i = \sqrt{{C_R}^2 + {C_I}^2}\cdot e^{i\theta}$$

$$= \sqrt{{C_R}^2 + {C_I}^2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

ただし，$\tan\theta = \dfrac{C_I}{C_R}$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$