

## 地震動に対する応答スペクトルとフーリエスペクトル

武蔵工業大学 コンクリート研究室

近藤 由樹

### *Key Words*

1 質点 1 自由度系, 地震応答スペクトル, フーリエスペクトル, 位相スペクトル

#### 1. はじめに

スペクトルの概念を一般的に定義すると、「複雑な組成を持つものを、単純な成分に分解し、その成分を、それを特徴付けるある量の大小の順に従って並べたもの」のようにまとめることができる。

スペクトルとして最も一般的に知られているものは、太陽光がプリズムを通ることによって現れる七色の光のスペクトルである。これはプリズムを通ることによって、光が波長の違いによって七色に分解されたということである。これは、地震応答解析においても同様であり、例えば、地震応答スペクトル、時刻歴波形のフーリエスペクトルある。これらは耐震設計上、非常に有用なデータであり、しばしば地震応答解析に用いられる。

本論では、地震応答スペクトルとフーリエスペクトルの基本的な考え及び数値解析例を示し、両者が酷似することを例示する。

## 2. 地震応答スペクトル

### 2.1 地震動に対する応答

質量  $m$  , 減衰係数  $c$  , 剛性  $k$  を有する 1 質点 1 自由度系に地震が作用した場合 , 地盤が  $\ddot{x}_e$  の加速度を持って動くとき運動方程式は次のようにあらわされる .

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_e \quad (2.1)$$

ここで ,  $-m\ddot{x}_e$  は時々刻々変化しながら質点に作用する力  $F(t)$  である

$$-m\ddot{x}_e = F(t) \quad (2.2)$$

とすると , 式 (2.1) は次のようになる

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.3)$$

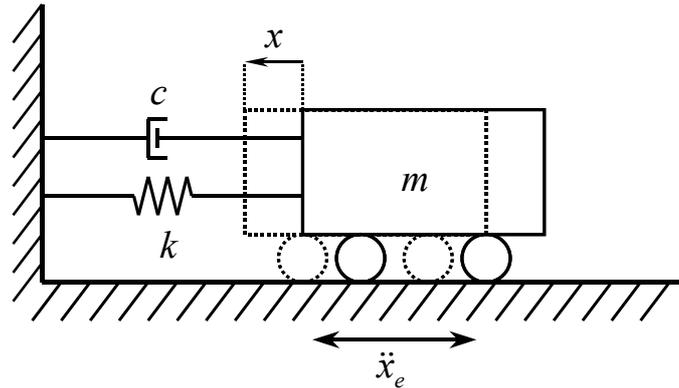


図 2.1 1 質点 1 要素系

これは任意の力が質点に作用した場合の運動方程式であるから , 微分方程式論より重畳積分を用いて任意時刻における質点の相対変位  $x(t)$  を算出すると次のようになる

$$x(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)}{m\omega_d} e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (2.4)$$

今の場合は , 地震動が作用したときであるから ,  $F(t) = -m\ddot{x}_e$  と置き換えればよい .

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (2.5)$$

速度 , 変位はそれぞれ次のようになる

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} [-h\omega \sin \omega_d(t-\tau) + \omega_d \cos \omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (2.6)$$

$$\ddot{x}(t) + \ddot{x}_e(t) = \frac{\omega_2(1-2h^2)}{\omega_d} \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau + 2h\omega \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (2.7)$$

ここで ,  $\omega_d = \omega\sqrt{1-h^2}$  を用いて変形すると次のようになる

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (2.8)$$

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \left[ \cos \omega_d(t-\tau) - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d(t-\tau) \right] d\tau \quad (2.9)$$

$$\ddot{x}(t) + \ddot{x}_e(t) = \omega_d \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \left[ \left( 1 - \frac{h^2}{1-h^2} \right) \sin \omega_d(t-\tau) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \cos \omega_d(t-\tau) \right] d\tau \quad (2.10)$$

これらの式より、1 質点 1 自由度系の応答は固有円振動数 $\omega$ (あるいは固有周期  $T$ )と減衰定数  $h$ 、および入力時振動によって決まり、それぞれ時間  $t$  によって時々刻々変化することが分かる。

### 2.2 地震応答スペクトル

固有周期の異なる質点系群に地震が作用した時の最大応答値を、固有周期ごとに表したものが地震応答スペクトルである。

式(2.8)、式(2.9)、式(2.10)からも分かるように 1 質点 1 自由度系の応答は、固有周期  $T$ と減衰定数  $h$ によってきまる。1 質点 1 自由度系に生じる最大相対変位応答、最大相対速度応答、最大絶対加速度応答を、それぞれ  $S_d, S_v, S_a$ とすれば、式( )より

$$S_d(h, T) = -\frac{1}{\omega_d} \left| \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (2.11)$$

$$S_v(h, T) = -\left| \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \left[ \cos \omega_d(t-\tau) - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d(t-\tau) \right] d\tau \right|_{\max} \quad (2.12)$$

$$S_a(h, T) = \omega_d \left| \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \left[ \left( 1 - \frac{h^2}{1-h^2} \right) \sin \omega_d(t-\tau) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \cos \omega_d(t-\tau) \right] d\tau \right|_{\max} \quad (2.13)$$

となり、固有周期ごとに最大値を算出し、プロットすれば地震応答スペクトルが得られる。

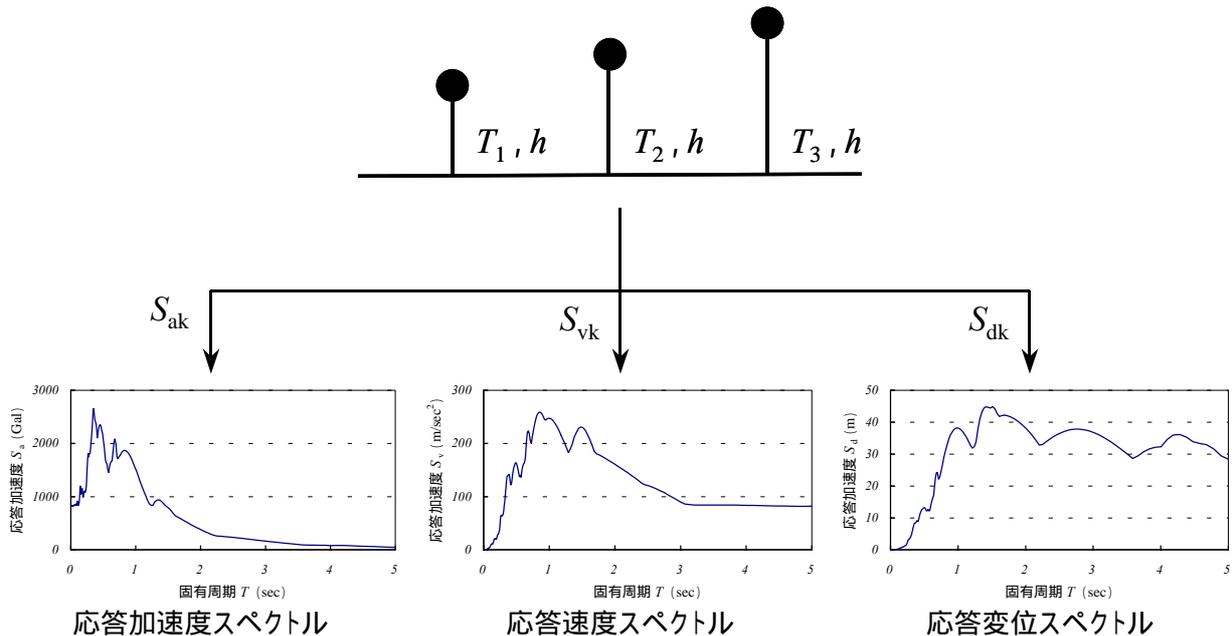


図 2.2 地震応答スペクトル

### 2.3 地震応答スペクトルの意義

地震が起こったとき、構造物の応答(加速度, 速度, 変位)は時間  $t$ , 固有周期  $T$ , 減衰定数  $h$  等の関数であり, 時間  $t$  とともに時々刻々に変化する。しかし, 耐震設計という立場からは応答の時間的な変化より, 最大応答値が重要な値になる。このような点からも, 地震応答スペクトルは重要な指標となっている。

加速度応答スペクトルは, 構造物に作用する力, すなわち地震力を示している。すなわち, 構造物に作用する最大のせん断力をあらわしている。

$$Q_{\max} = m(\ddot{x} + \ddot{x}_e)_{\max} \quad (2.14)$$

速度応答スペクトルは, 地震動が構造物に与える最大のエネルギーを示している。

ばね定数を  $k$  (構造物の部材剛性), 最大変位を  $x_{\max}$  とすれば次のようになる。

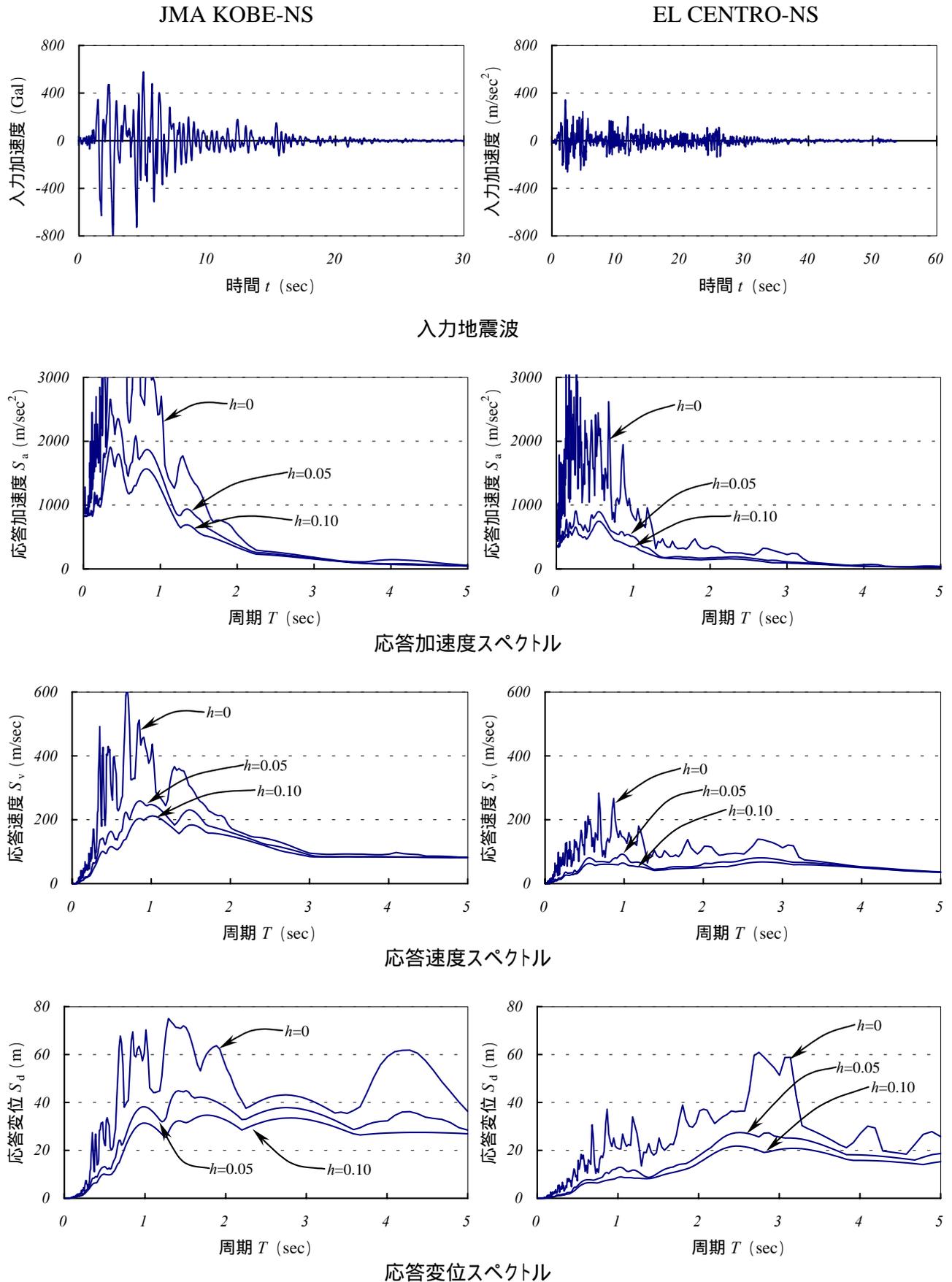
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{m} x_{\max}^2 &= \frac{1}{2} (\omega x_{\max})^2 \\ &= \frac{1}{2} S_v^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

変位応答スペクトルは, 変位すなわちひずみの大きさを表している。

$$Q_{\max} = kx_{\max} \quad (2.16)$$

2.4 数値解析例

図に入力地震波 JMA KOBE-NS, EL CENTRO-NS の数値解析例を示す。減衰定数は  $h=0, 0.05, 0.10$  を用いている。



3. フーリエスペクトル

3.1 有限フーリエ近似式

標本点間隔を  $\Delta t$  , 標本数を  $N$  とすれば , 継続時間は

$$T = N\Delta t \tag{3.1}$$

である . また , 格標本点における標本値を  $x_m$  とする .  $m$  は標本点の番号であり , 次のような整数である .

$$m = 0, 1, 2, \dots, N-1, N \tag{3.2}$$

$m$  番目の標本の時刻は

$$t = m\Delta t \tag{3.3}$$

したがって , もとの時間関数を関数  $x(t)$  であらわすことにすれば

$$x_m = x(m\Delta t) \tag{3.4}$$

である .

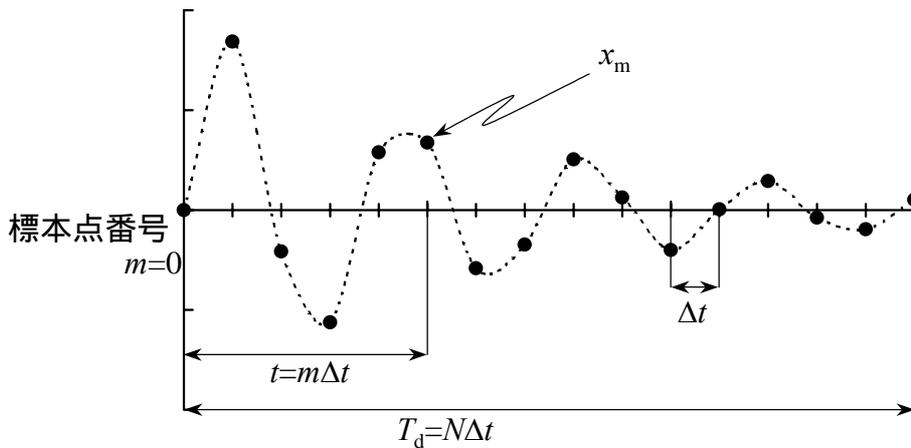


図 3.1 波形データ

$N$  個の標本値  $x_m$  を , 全部通るような関数の決め方は , 無限に存在するが , ここでは三角関数を使ったものを説明する .

一般に

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$$

$$B_0, B_1, B_2, \dots, B_k, \dots$$

を定数としたとき有限三角級数は次のように表せる .

$$\begin{aligned} & A_0 + A_1 \cos t + A_2 \cos 2t + \dots + A_k \cos kt + \dots \\ & + B_0 + B_1 \sin t + B_2 \sin 2t + \dots + B_k \sin kt + \dots \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt) \end{aligned} \tag{3.5}$$

これは  $k$  について 0 から まで総和している無限級数であるが ,  $N/2$  までのところで打ち切ってみると

$$= \sum_{k=0}^{N/2} (A_k \cos kt + B_k \sin kt) \tag{3.6}$$

といった有限三角級数になる .

ここで , この有限三角級数が任意の値  $x_m$  に等しく ,  $t \rightarrow \frac{2\pi}{N\Delta t} t$  とおくと ( $\frac{2\pi}{N\Delta t} = const$ )

$$x_m = \sum_{k=0}^{N/2} \left[ A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{N\Delta t} t\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi k}{N\Delta t} t\right) \right] \quad (3.7)$$

この関数は、明らかに時間  $t$  の関数である。そこで、 $t$  を  $m$  番目の標本点の時刻に等しく  $t=m\Delta t$  とおいたとき、式(3.8)の値が  $m$  番目の標本値  $x_m$  に等しくなればよい。

$$x_m = \sum_{k=0}^{N/2} \left[ A_k \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \right] \quad (3.8)$$

ここで、 $k=0$ 、 $k=N/2$  の場合は明らかに

$$B_0 \sin\frac{2\pi km}{N} = 0, \quad B_{N/2} \sin\left(\frac{2\pi(N/2)m}{N}\right) = B_{N/2} \sin(\pi m) = 0 \quad (3.9)$$

となり、式(3.9)は合計  $N$  個の定数

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_{N/2}$$

$$B_1, B_2, \dots, B_k, \dots, B_{N/2-1}$$

を含む。また  $k=0$  のときは

$$A_0 \cos\frac{2\pi km}{N} = A_0 \quad (3.10)$$

すなわち、

$$x_m = \tilde{x}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left[ A_k \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \right] + A_{N/2} \cos\left(\frac{2\pi(N/2)m}{N}\right) \quad (3.11)$$

となり、定数  $A_0, A_{N/2}$  をそれぞれ  $A_0/2, A_{N/2}/2$  と書き換えると

$$\tilde{x}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left[ A_k \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \right] + \frac{A_{N/2}}{2} \cos\left(\frac{2\pi(N/2)m}{N}\right) \quad (3.12)$$

となる。この式は関数  $x(t)$  の有限フーリエ近似式、 $A_k, B_k$  を有限フーリエ係数という。

これは多元連立方程式の解法に従えば、 $N$  個の未知数をすべて一義的に定めることができる。すなわち、全ての  $x_m$  点を通る時間関数は、有限三角関数によって表わすことができる。

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot \cos\frac{2\pi km}{N} \quad (k=0,1,2,\dots, N/2-1, N/2) \quad (3.13)$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot \sin\frac{2\pi km}{N} \quad (k=1,2,\dots, N/2-1) \quad (3.14)$$

### 3.2 フーリエ変換、フーリエ逆変換

離散的なデータから、連続的な波形を再現するのに用いる式を「有限フーリエ近似式」といい、次式で表わされる。

$$\tilde{x}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left[ A_k \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \right] + \frac{A_{N/2}}{2} \cos\left(\frac{2\pi(N/2)m}{N}\right) \quad (3.14)$$

右辺第一項  $A_0/2$  は全標本値の平均であり、直流成分という。また、式(3.14)は元の波形が  $\cos$  波と  $\sin$  波に分解されているとみなすことができる。

そこで、 $f_k = \frac{k}{N\Delta t} = \frac{k}{T}$  とおくと

$$\tilde{x}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left[ A_k \cos(2\pi f_k t) + B_k \sin(2\pi f_k t) \right] + \frac{A_{N/2}}{2} \cos(2\pi f_{N/2} t) \quad (3.15)$$

式(3.15)は  $k=1$  から  $N/2-1$  の和と、 $k=N/2$  にあたる  $\cos$  の項が付け加わったものだから、元の波形をそれぞれの振動数

$$f_1, f_2, \dots, f_{N/2-1}, f_{N/2}$$

を有する異なった  $N/2$  種類の波に分解していることが分かる。一般に  $f_k$  をに  $k$  次の振動数といい、 $k$  次の振動数の波を  $k$  次成分という。式( )から明らかなように

$$f_1 < f_2 < \dots < f_{N/2-1} < f_{N/2}$$

であるから、高次成分ほど周波数が高い。特に、1 次の振動数

$$f_1 = \frac{1}{N\Delta t} \quad (3.16)$$

を基本振動数という。また、最も高次の振動数 ( $k=N/2$ )

$$f_{N/2} = \frac{(N/2)}{N\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (3.17)$$

をナイキスト振動数といい、フーリエ変換ではこれ以上の高周波数成分を検出できない。

式(3.15)は三角関数の重ね合わせの原理を用いると次式のようになる。

$$\tilde{x}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} [X_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)] + \frac{X_{N/2}}{2} \cos(2\pi f_{N/2} t) \quad (3.18)$$

$$X_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (3.19)$$

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(-\frac{B_k}{A_k}\right) \quad (-\pi < \phi_k < \pi) \quad (3.20)$$

つまり、元の不規則波  $x(t)$  は  $N/2$  種類の  $\cos$  波に分解され、各波は振幅  $X_k$  と位相角  $\phi_k$  から構成されている。これをフーリエ変換という。ここで、 $X_k$  は  $k$  次成分の振幅、 $\phi_k$  は位相角を表わしている。

逆に、 $N/2$  種類の振幅  $X_k$  と位相角  $\phi_k$  が決まれば、元の不規則波を再現することができる。これをフーリエ逆変換という。

$$A_k = X_k \cos \phi_k \quad (-\pi < \phi_k < \pi) \quad (3.21)$$

$$B_k = -X_k \sin \phi_k \quad (-\pi < \phi_k < \pi) \quad (3.22)$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} [A_k \cos(2\pi f_k t) + B_k \sin(2\pi f_k t)] + \frac{A_{N/2}}{2} \cos(2\pi f_{N/2} t) \quad (3.23)$$

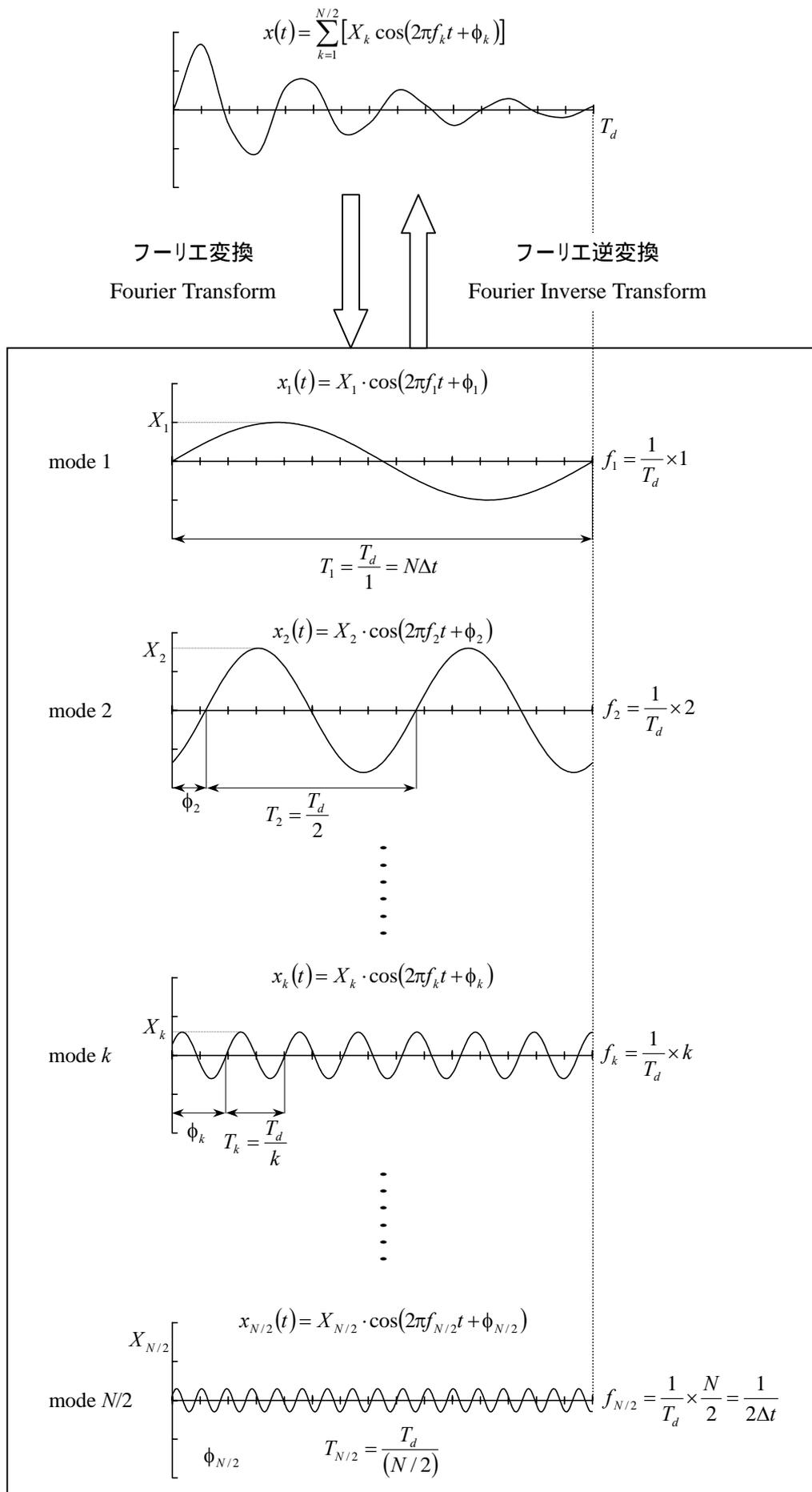


図 3.2 フーリエ変換の概念図

### 3.3 フーリエ振幅スペクトル, フーリエ位相スペクトル

フーリエ(振幅)スペクトルとは, フーリエ変換された各成分波の振幅  $X_k$  に  $T_d/2$  を乗じたものを, 振動数ごとに並べたものである. これは, 各成分波の振幅特性を表しており, 不規則波の振幅が, どの振動数成分に寄与しているかを端的に表現するものである.

フーリエ位相スペクトルとは, 各成分波の位相角  $\phi_k$  を周波数軸上に並べたものである.

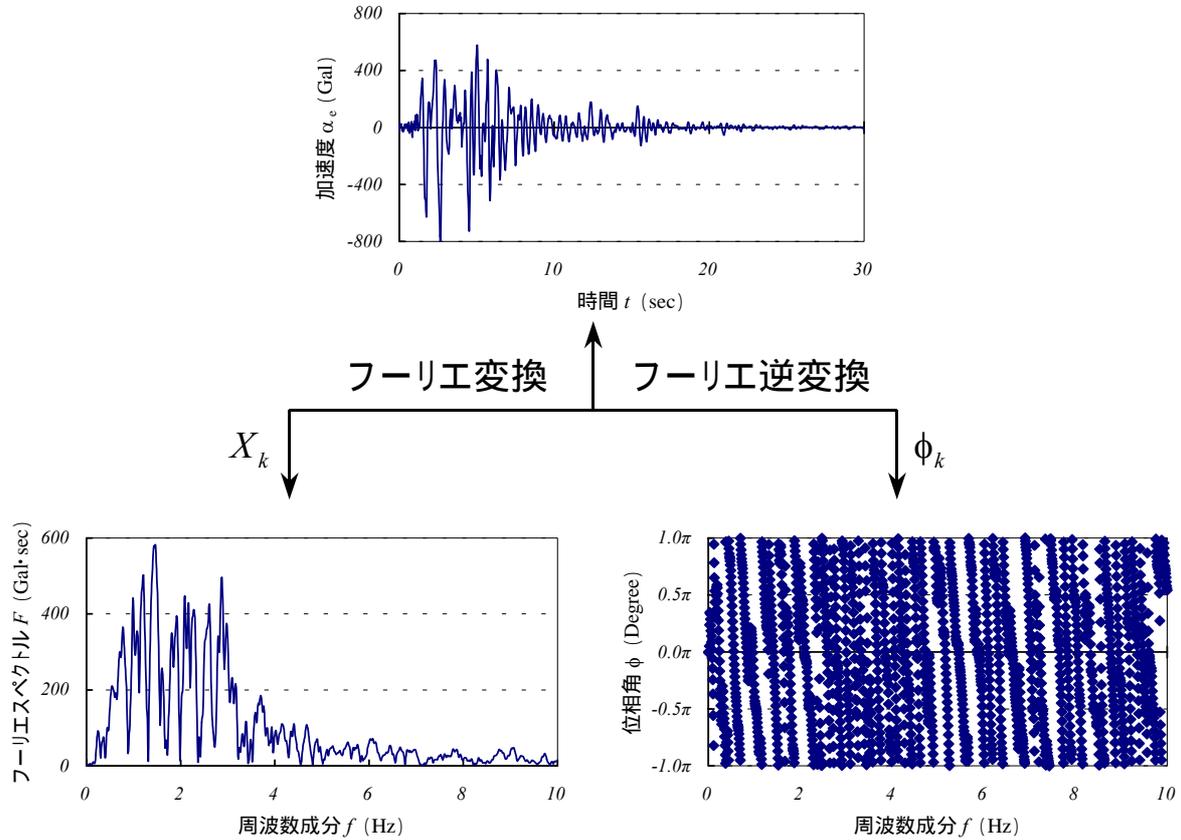


図 3.3 フーリエ変換

### 3.4 フーリエ変換の複素数表示

前節より, 等間隔な標本店における  $N$ (偶数)個の標本値  $x_m$  が与えられたとき, そのフーリエ変換は,

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot \cos \frac{2\pi km}{N} \quad (3.24)$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot \sin \frac{2\pi km}{N} \quad (3.25)$$

で表され, フーリエ逆変換は次式で表される.

$$x_m = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left[ A_k \cos \left( \frac{2\pi km}{N} \right) + B_k \sin \left( \frac{2\pi km}{N} \right) \right] + \frac{A_{N/2}}{2} \cos \left( \frac{2\pi (N/2)m}{N} \right) \quad (3.26)$$

オイラーの公式を用いて, 複素数表示にすると次式のようになる.

$$x_m = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (A_k - iB_k) e^{i(2\pi km/N)} \quad (3.27)$$

ここで, 次のような複素フーリエ係数または, 複素振幅と呼ばれるものを定義すると

$$C_k = \frac{A_k - iB_k}{2} \quad (k=0,1,2,\dots, N-2, N-1) \quad (3.28)$$

$$x_m = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{i(2\pi km/N)} \quad (m=1,2,\dots, N-2, N-1) \quad (3.29)$$

となり,これを有限複素フーリエ級数という.

これをフーリエ積分すると,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{i(2\pi ft)} dt \quad (3.30)$$

これを,フーリエ逆変化という.また,フーリエ変換は次式で表される.

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i(2\pi ft)} dt \quad (3.31)$$

振動数  $f$  の代わりに,円振動数  $\omega$  で表わすと,

$$2\pi f = \omega \quad (3.32)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.33)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.34)$$

### 3.4 フーリエスペクトルの意義

時刻歴データは時間軸に対して描かれている.つまり時間領域における表示である.これに対してフーリエスペクトルは振動数に対して描かれており,周波数領域における表示である.時刻歴データをフーリエスペクトルによって表わすことには,大きく2つの意味がある.

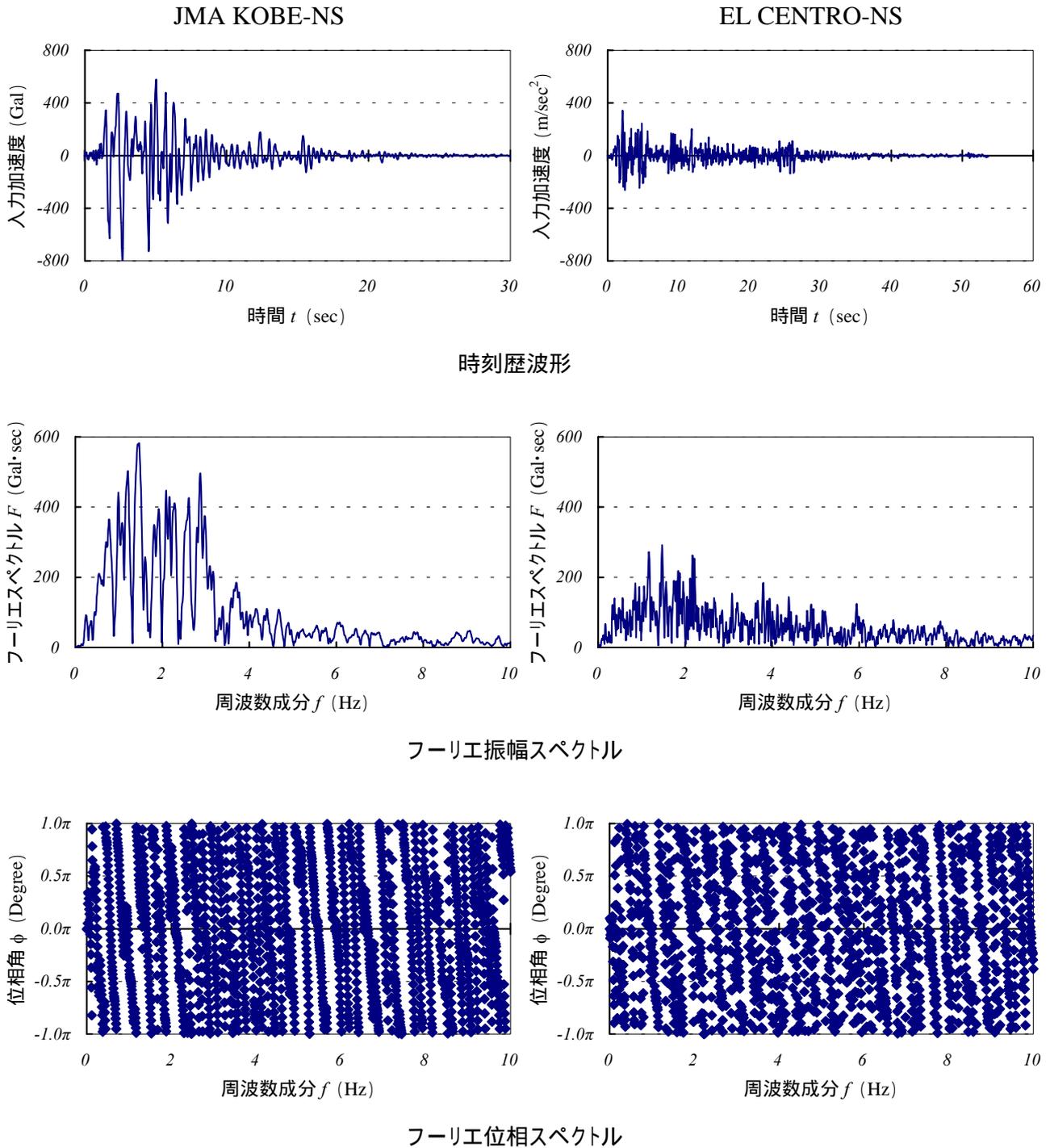
1つは,時刻歴データに含まれている振動数成分の検出であり,もう1つは,時刻歴データをフーリエ変換することによって,時間領域から振動数領への変換である.

時刻歴データが地震動の加速度であれば,その地震波が構造物に与える影響を推察することが出来る.また,特に大きい振幅の成分周期(振動数)を,卓越周期(振動数)という.

振動数領域から時間領域への逆変換を行うことによって,時刻歴データを作成することも出来る.つまり,模擬地震動の作成である.

### 3.5 数値解析例

図に入力地震波 JMA KOBE-NS , EL CENTRO-NS の数値解析例を示す .



## 4. 応答スペクトルとフーリエスペクトル

前節で示したように, 1 質点 1 自由度系の速度応答は次式で表される.

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t \ddot{x}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \left[ \cos \omega_d(t-\tau) - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d(t-\tau) \right] d\tau \quad (4.1)$$

マイナス記号と減衰を考えない ( $h=0$ ) ものとする,

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \quad (4.2)$$

また, 三角関数の関係を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \cos \omega t \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \sin \omega t \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) \sin \omega \tau d\tau \\ &= \sqrt{\left[ \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right]^2 + \left[ \int_0^t \ddot{x}_e(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]^2} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ただし,

$$\tan \phi = \frac{\int_0^t \ddot{x}_e(\tau) \sin \omega \tau d\tau}{\int_0^t \ddot{x}_e(\tau) \cos \omega \tau d\tau} \quad (4.4)$$

すなわち, 減衰  $h=0$  の場合の応答速度スペクトルは次式で表される.

$$S_v(h=0, T) = \left| \sqrt{\left[ \int_0^T \ddot{x}_e(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right]^2 + \left[ \int_0^T \ddot{x}_e(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]^2} \cos(\omega T + \phi) \right|_{\max} \quad (4.5)$$

一方, フーリエスペクトルは前節より, 次式で表わされる.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^T \ddot{x}_e(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^T \ddot{x}_e(t) \cos \omega t dt - i \int_0^T \ddot{x}_e(t) \sin \omega t dt \\ &= \sqrt{\left[ \int_0^T \ddot{x}_e(t) \cos \omega t dt \right]^2 + \left[ \int_0^T \ddot{x}_e(t) \sin \omega t dt \right]^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

式(4.5)に示した応答速度スペクトルの  $2\pi/\omega$  は, 振動を受ける系の固有周期であり, 式(4.6)に示したフーリエスペクトルの  $2\pi/\omega$  は地震動の構成成分の周期である.

しかし, このような相違を考えないで, 式(4.5)と式(4.6)の両者は同様な数学的技法となり, 答速度スペクトル方が, 余弦関数分付加されていることが分かる. また, 両者のスペクトルを重ねて描いても完全には一致しないが, ほぼ同様な形状である. しかし, 地震応答スペクトルは, 1 質点 1 自由度系によって代表される構造物に対して, 地震波が与える最大の影響を表現しているものに対して, フーリエスペクトルは波そのものの特性をあらわすものである. 大崎 順彦の「新・地震動のスペクトル解析入門」によれば, 同じ地震動の応答速度スペクトルとフーリエスペクトルを比較しても, 両者の関係は一概には言えないと記されている

図 4.1, 図 4.2 に数値解析例を示す. 時刻歴波形は JMA KOBE-NS, EL CENTRO-NS を用いている.

図 4.1 は横軸を振動数  $f$  で表示し, 図 4.2 は周期  $T$  で表示している.

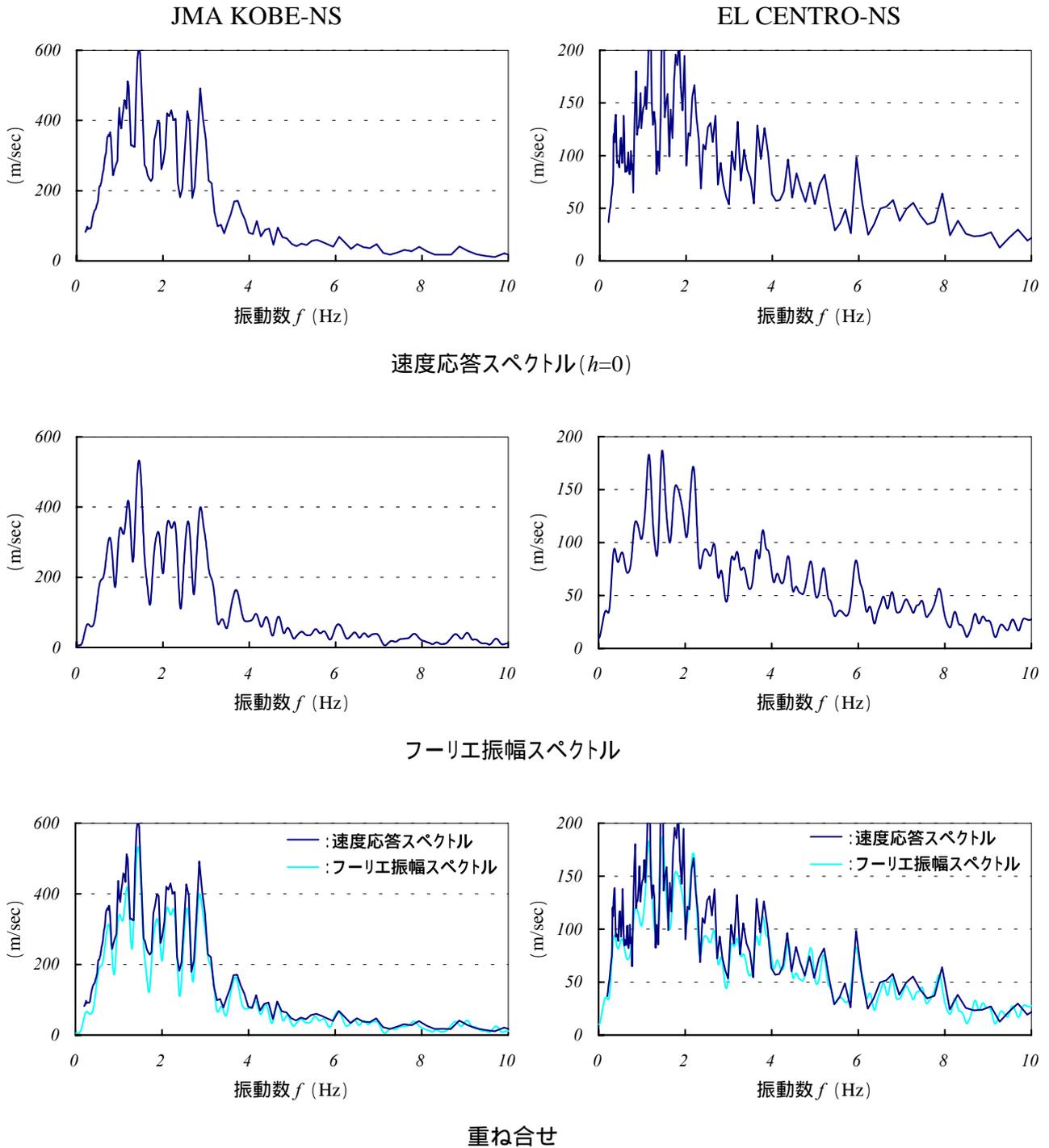


図 4.1 振動数表示

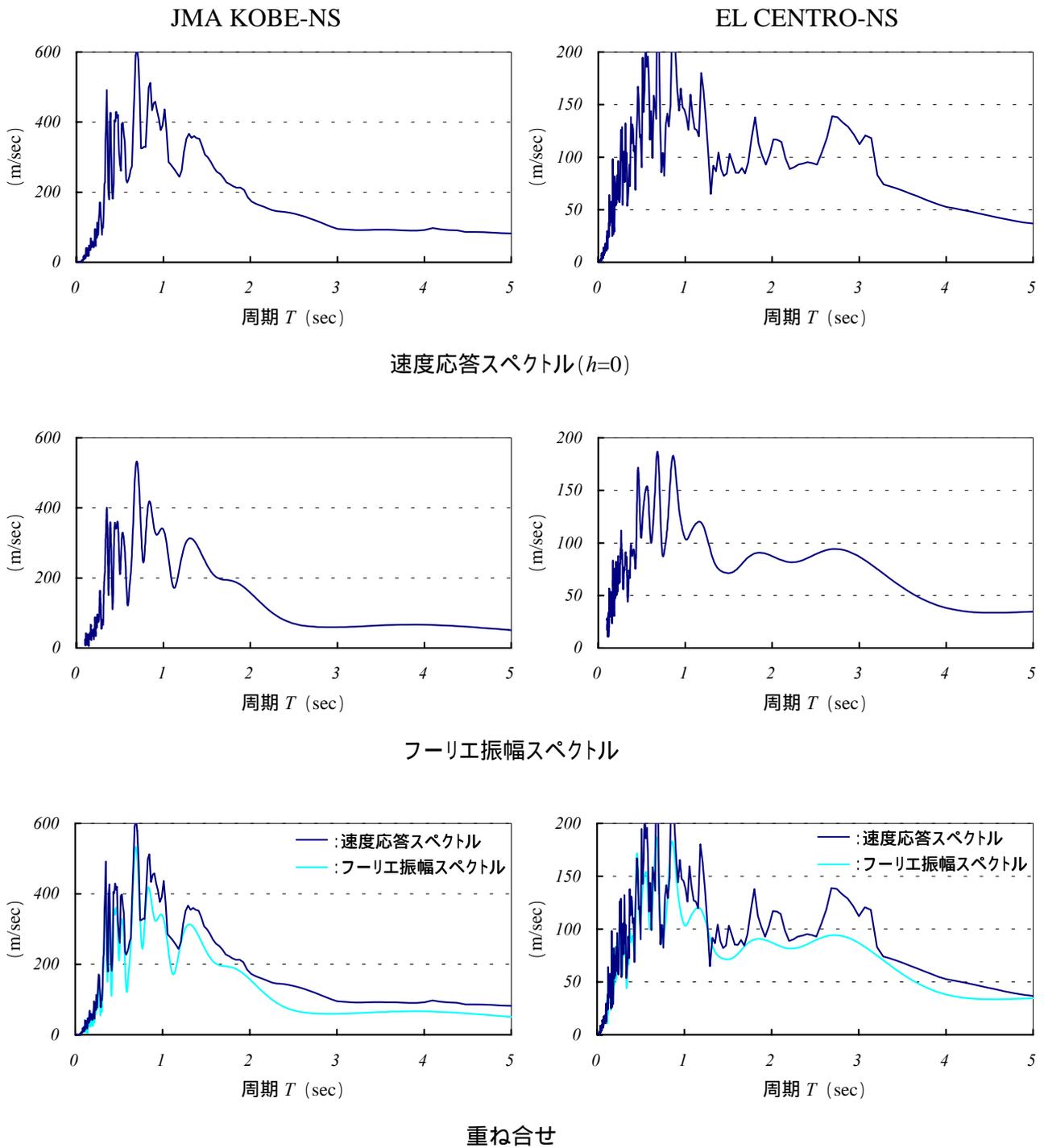


図 4.2 周期表示

【参考文献】

大崎 順彦:新・地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1994.5

平井 一男, 水田洋司:耐震工学入門, 森北出版, 1994.3

CRC 総合研究所: DYN2E (立体骨組構造物の動的解析プログラム) 理論説明書

柴田 明德:最新建築学シリーズ9 最新 耐震構造解析, 森北出版, 1981.6

遠藤 昭彦:設計用模擬地震動によるRC単柱式橋脚の耐震性能評価, 平成11年度 武蔵工業大学卒業論文, 2000.3