

非線形定常応答による簡易応答評価法に関する一検討

松原勝己（東電設計）・吉川弘道（武蔵工大）・浦野和彦（ハザマ）

1.はじめに

地震時における構造物の弾塑性変位応答値を推定する方法として、古くからエネルギー一定則や変位一定則などの簡易応答評価法がある。これらは、現状の耐震設計指針においても比較的頻繁に用いられている。これら簡易応答評価法は、非線形動的解析を介さずに弾塑性応答変位が求められることで実用に供しやすい反面、その適用範囲や推定精度に関する批判が多いことも事実である。本報告は、これら簡易評価法をより適用性と精度の高い推定式へ改良することを前提とし、推定式の一つの問題点が入力地震動や構造物の周期特性を無視していることにあることを、非線形定常応答の解析解（クリロフ・ボゴリポフの方法）に基づき考察したものである。

2.K-B法（クリロフ・ボゴリポフ法）

一自由度非線形振動系の定常応答値を解析的に算定する方法として、K-B法 [土木学会(1989)]がある。K-B法によれば、一自由度系の定常応答（共振曲線）が以下のように得られる。

調和外力（正弦波加振）が作用する一自由度系の振動方程式は、次式で書くことができる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + F(x, t) = f_0 \cos \omega t \quad (1)$$

式(1)を次のパラメータを用いて無次元化すると式(2)を得る。

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m}, \quad \omega_0 t = \tau, \quad \frac{x_1}{x_y} = y$$

$$\frac{F_y}{x_y} = k_1, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = h, \quad \frac{f_0}{F_y} = f$$

ここに、 ω_0 ：初期剛性 k_1 に対する固有振動数、 k_1 ：初期剛性、 x_y ：降伏変位、 F_y ：降伏耐力、 x ：変位、 $F(x, t)$ ：非線形復元力、 ω ：外力の円振動数、 t ：無次元化時間、 y ：無次元化変位、 h ：振動数比、 f ：無次元加振力 である。

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{F\{x(y), t(\tau)\}}{F_y} = f \cos h\tau \quad (2)$$

このとき、K-B法によって得られる共振曲線は、次式で書くことができる

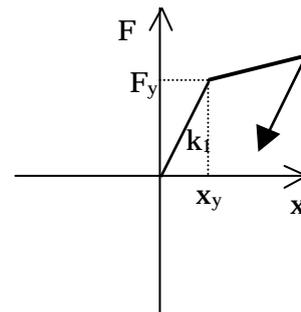


図-1 非線形復元力特性

$$y = y_0 \cos(\mathbf{h}t + \mathbf{f}_0) \quad (3a)$$

$$\mathbf{h}^2 = \frac{C(y_0)}{y_0} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{S(y_0)}{y_0}\right)^2} \quad (3b)$$

$$\tan \mathbf{f}_0 = \frac{S(y_0)}{C(y_0) - \mathbf{h}^2 y_0} \quad (3c)$$

ここに、式(3a)が無次元化した応答変位を表しており、そのうち y_0 が無次元化振幅を y_0 が位相ずれを表す。また、式(3b)が振動数比 \mathbf{h} と無次元化振幅 y_0 の関係を表すもので、非線形系の共振曲線となる。さらに、式(3c)は非線形系における振動数比と位相ずれの関係である。

なお、式(3b)で表される非線形系の共振曲線は、振動数比が無次元化振幅の関数として書かれていることと入力無次元加振力 f に依存することに注意すべきである。これは、線形系の共振曲線（応答値そのものではなく入力に対する応答値の比すなわち応答倍率となる）においては応答振幅が振動数比の関数で書かれることや入力振幅には依存しないことと対照的に、非線形系の特徴であると言える。

式(3)における $C(y_0)$ と $S(y_0)$ は、次式で表される。

$$C(a) = \frac{1}{p} \int_0^{2p} \left[\frac{F(a \cos q, t)}{F_y} \right] \cos q dq \quad (4a)$$

$$S(a) = \frac{1}{p} \int_0^{2p} \left[\frac{F(a \cos q, t)}{F_y} \right] \sin q dq \quad (4b)$$

3. バイリニアール復元力特性に対する共振曲線

図-2 を参照して、 $y = y_0 \cos q$ と置き、 y を $y_0 \cos q$ で表す。 $y_0 \cos^2 q = y_0 - 2y_0 \sin^2 q$ より、次式が成立する。

$$\cos^2 q = 1 - 2 \frac{y}{y_0} \quad (5)$$

バイリアーの履歴を一周する間に、 y の値が $-y_0 \rightarrow -y_0 + 2 \rightarrow 0 \rightarrow y_0 - 2 \rightarrow y_0$ と変化し、 F/F_y は $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ まで変動する。

$F/F_y = ay + b$ と置いて、それぞれの区間での $F/F_y \sim y$ 関係を求める。なお、以下の式で $\mu = k_2/k_1$ （初期剛性に対する第2接線剛性の比）である。

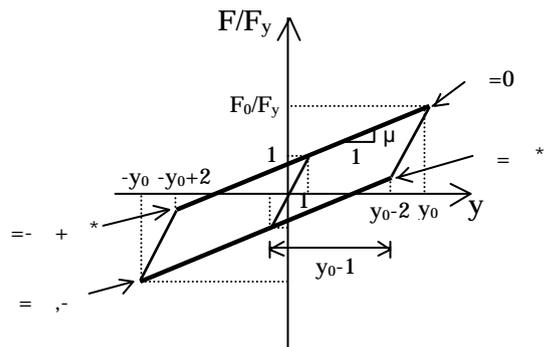
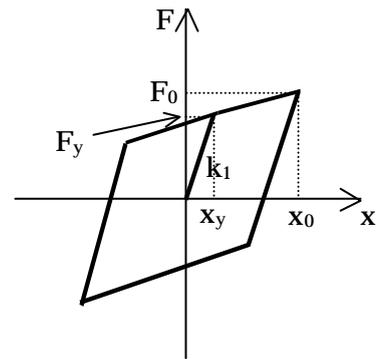


図-2 バイリニアール復元力特性
(下の図は無次元表示)

$$\begin{aligned}
- & \quad - + * ; F/F_y = y + (1 - \mu)(y_0 - 1) = y_0 \cos \quad + (1 - \mu)(y_0 - 1) \\
- & \quad + * \quad 0 ; F/F_y = \mu(y - 1) + 1 = \mu(y_0 \cos \quad - 1) + 1 \\
0 & \quad * ; F/F_y = y - (1 - \mu)(y_0 - 1) = y_0 \cos \quad - (1 - \mu)(y_0 - 1) \\
* & \quad ; F/F_y = \mu(y + 1) - 1 = \mu(y_0 \cos \quad + 1) - 1
\end{aligned}$$

上記それぞれの区間での $S(y_0)$ を計算する。

$$\begin{aligned}
& \int_{-p}^{-p+q^*} [y_0 \cos q + (1 - m)(y_0 - 1)] \sin q dq \\
& = \frac{1}{4} y_0 (1 - \cos 2q^*) - (1 - m)(y_0 - 1)(1 - \cos q^*) \\
& \int_{-p+q^*}^0 [m(y_0 \cos q - 1) + 1] \sin q dq \\
& = \frac{1}{4} m y_0 (\cos 2q^* - 1) - (1 - m)(1 + \cos q^*) \\
& \int_0^{q^*} [y_0 \cos q - (1 - m)(y_0 - 1)] \sin q dq \\
& = \frac{1}{4} y_0 (1 - \cos 2q^*) - (1 - m)(y_0 - 1)(1 - \cos q^*) \\
& \int_{q^*}^p [m y_0 \cos q - (1 - m)] \sin q dq \\
& = -\frac{m y_0}{4} (1 - \cos 2q^*) - (1 - m)(1 + \cos q^*)
\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}
S(y_0) & = \frac{1}{2p} [y_0 (1 - \cos 2q^*) (1 - m) - 4(1 - m) \{ (y_0 - 1)(1 - \cos q^*) + (1 + \cos q^*) \}] \\
& = \frac{1 - m}{p} [y_0 (1 - \cos^2 q^*) - 2 \{ y_0 - (y_0 - 2) \cos q^* \}]
\end{aligned}$$

$$y_0 - 2 = y_0 \cos q^* \text{ より}$$

$$S(y_0) = -\frac{4(1 - m)}{p} \frac{y_0 - 1}{y_0} \quad (6)$$

次に、 $C(y_0)$ を計算する。

$$\begin{aligned}
& \int_{-p}^{-p+q^*} [y_0 \cos q + (1-m)(y_0-1)] \cos q dq \\
&= \frac{y_0}{4} (2q^* + \sin 2q^*) - (1-m)(y_0-1) \sin q^* \\
& \int_{-p+q^*}^0 [my_0 \cos^2 q + (1-m) \cos q] dq \\
&= \frac{my_0}{4} (2p - 2q^* - \sin 2q^*) + (1-m) \sin q^* \\
& \int_0^{q^*} [y_0 \cos^2 q - (1-m)(y_0-1) \cos q] dq \\
&= \frac{y_0}{4} (2q^* + \sin 2q^*) - (1-m)(y_0-1) \sin q^* \\
& \int_{q^*}^p [my_0 \cos^2 q - (1-m) \cos q] dq \\
&= \frac{my_0}{4} (2p - 2q^* - \sin 2q^*) + (1-m) \sin q^*
\end{aligned}$$

以上より

$$C(y_0) = \frac{2}{p} \left[\frac{y_0}{4} (2q^* + \sin 2q^*) (1-m) + \frac{p}{2} my_0 - (1-m)(y_0-2) \sin q^* \right]$$

$$y_0 - 2 = y_0 \cos q^* \text{ より}$$

$$C(y_0) = my_0 + \frac{1-m}{p} y_0 \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{y_0-2}{y_0} \right) - \frac{2(y_0-2)\sqrt{y_0-1}}{y_0^2} \right\} \quad (7)$$

式(3b)、(6)および(7)よりバイリニア-復元力特性を有する一自由度振動系の共振曲線が、以下のように得られる。

$$h^2 = m + \frac{1-m}{p} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{y_0-2}{y_0} \right) - \frac{2(y_0-2)\sqrt{y_0-1}}{y_0^2} \right\} \pm \frac{1}{y_0} \sqrt{f^2 - \frac{16(1-m)^2}{p^2} \frac{(y_0-1)^2}{y_0^2}} \quad (8)$$

ここに、 $h = \frac{w}{w_0}$ (振動数比), $y_0 = \frac{x_0}{x_y}$ (応答塑性率)

$m = \frac{k_2}{k_1}$ (初期剛性に対する第2剛性の比),

$f = \frac{f_0}{f_y}$ (無次元最大加振力)

式(8)によれば、降伏変位で無次元化した最大応答変位 y_0 (応答塑性率) が、振動数比 (固有円振動数に対する外力の円振動数の比)、第2剛性比 μ (初期剛性に対する第2接線剛性の比) および降伏耐力で無次元化した最大加振力 f に依存することがわかる。

4. 共振曲線の計算手順

上記式(8)を用いて、共振曲線を計算する手順に関して述べる。

式(8)において注意すべきことが2点ある。1点目は、最大応答変位が振動数比に応じてどう変化するかという情報がほしいにも拘わらず、振動数比が最大応答変位の関数として表され、最大応答変位が振動数比の陽な形で表せないということである。したがって、まず振動数比が最大応答変位によって変化する様子を求め、その関係を逆に見てやる必要がある。2点目として、最大応答変位を指定してそれに対応する振動数比を求めたとしても、式(8)に示すようにその値が2箇存在する(振動数比が最大応答変位の2価関数となっている)ことである。

以上に注意して、以下の手順で計算できる。

- (1) 第2剛性比 $\mu = k_2/k_1$ を設定する。
- (2) 無次元加振力 f を設定する。
- (3) 共振点(ピーク時)での振幅 y_{0R} を次式で計算する。これは、式(8)の根号内がゼロの時に対応する。

$$y_{0R} = \frac{4/p(1-m)}{4/p(1-m)-f} \quad (f \leq 4/p(1-m))$$

- (4) y_{0R} より小さい y_0 に対して、2つの h を次式により計算する。

$$h^2 = m + \frac{1-m}{p} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{y_0-2}{y_0} \right) - \frac{2(y_0-2)\sqrt{y_0-1}}{y_0^2} \right\} \pm \frac{1}{y_0} \sqrt{f^2 - \frac{16(1-m)^2}{p^2} \frac{(y_0-1)^2}{y_0^2}}$$

ただし、上式で $y_0 < 1$ のときは、応答変位が降伏変位を上回らないということであるから弾性範囲内にある場合である。

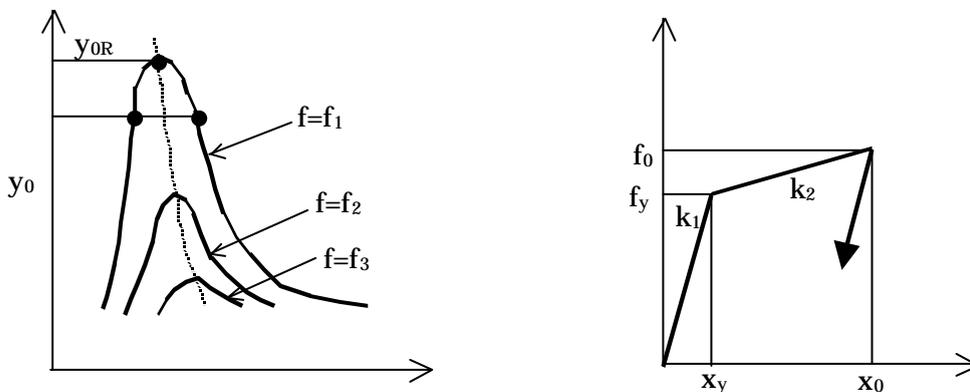


図-3 共振曲線と復元力特性

[共振曲線の計算例]

$$\mu = k_2/k_1 = 0.2$$

$$f = f_0/f_y = 0.4, 0.5, 0.6$$

$$f=0.4 \text{ のとき ; } 4/ (1-\mu) = 1.019 \quad y_{0R} = 1.019/(1.019-0.4) = 1.646$$

$$f=0.5 \text{ のとき ; } 4/ (1-\mu) = 1.019 \quad y_{0R} = 1.019/(1.019-0.5) = 1.963$$

$$f=0.6 \text{ のとき ; } 4/ (1-\mu) = 1.019 \quad y_{0R} = 1.019/(1.019-0.6) = 2.432$$

下表において、式(8)の右辺第 1 項と 2 項の和を A と右辺第 3 項を B とする。

表-1 共振曲線の計算例

f	y ₀	A	B	² (=A+B)	
0.4	1.646	0.709	0	0.709	0.842
	1.5	0.767	±0.141	0.908, 0.626	0.953, 0.791
	1.3	0.861	±0.249	1.11, 0.612	1.054, 0.782
	1.2	0.913	±0.302	1.215, 0.611	1.102, 0.782
0.5	1.963	0.610	0	0.610	0.781
	1.8	0.657	±0.118	0.775, 0.539	0.880, 0.734
	1.6	0.726	±0.202	0.928, 0.524	0.963, 0.724
	1.4	0.812	±0.290	1.102, 0.522	1.050, 0.722
0.6	1.2	0.913	±0.392	1.305, 0.521	1.142, 0.722
	2.432	0.510	0	0.510	0.714
	2.2	0.554	±0.103	0.657, 0.451	0.811, 0.672
	2.0	0.600	±0.158	0.758, 0.442	0.871, 0.665
	1.8	0.657	±0.219	0.876, 0.438	0.936, 0.662
	1.6	0.726	±0.289	1.015, 0.437	1.007, 0.661
0.6	1.4	0.812	±0.375	1.187, 0.437	1.089, 0.661
	1.2	0.913	±0.480	1.393, 0.433	1.180, 0.658

$$A = m + \frac{1-m}{p} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{y_0 - 2}{y_0} \right) - \frac{2(y_0 - 2)\sqrt{y_0 - 1}}{y_0^2} \right\}$$

$$B = \pm \frac{1}{y_0} \sqrt{f^2 - \left\{ \frac{4}{p} (1-m) \frac{y_0 - 1}{y_0} \right\}^2}$$

なお、弾性状態($y_0 < 1$)に対しては、 $y_0 = f / |1 - \mu|$ で表される。

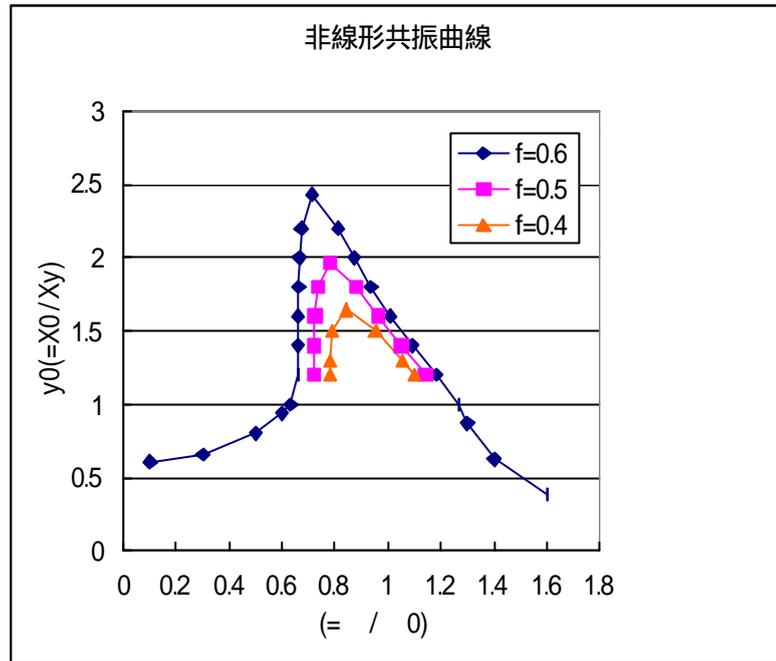


図-4 非線形共振曲線の計算例

表-1 に示した計算例を図化すると、図-4 が得られる。ただし、図-4 においては、 $f=0.4$ および 0.5 のケースでは $y_0 < 1$ の弾性状態を図化していない。

図-4 によれば、無次元応答変位（応答塑性率） y_0 が、振動数比 ω / ω_0 によって変化し、ある振動数比でピークを有する（共振状態）ことがわかる。また、そのピークの値は、外力の大きさ（正確には無次元加振力 f ）によって変化し、外力が大きくなるほど（ f が大きいほど）ピーク値が大きくなることがわかる。さらに、そのピークを示す振動数比は外力が大きいかほど小さくなることも示されている。この外力の大きさに依存して共振点の振幅や振動数が変化することは、線形振動系では見られない非線形振動系における特徴である。

いま、初期剛性に対応する構造物の固有振動数 ω_0 が一定のもとで、外力に依存するピーク値の変化は、外力が大きくなるとピーク時における外力の円振動数 ω が低振動数側へと変動する。これは、大きな外力が作用するほど、低い振動数によって共振状態となることを意味するから、構造物の変位応答が大きくなる非線形域では、応答性状が長周期化（低振動数化）することを示すと理解できる。

5. 簡易応答評価法に関する検討

(1) 変位一定則とエネルギー一定則

一自由度振動系における変位一定則とエネルギー一定則による変位推定式を誘導する。
加振力 f_0 に対する弾性定常応答 x_{0E} は、式(9)で表される。

$$x_{0E} = \frac{f_0}{k_1} \frac{1}{\sqrt{(1-h^2)^2 + 4h^2h^2}} \quad (h: \text{減衰定数}) \quad (9)$$

ここで、 $k_1 x_{0E} / f_0 = y_{0E} / f$ を考慮すれば、式(10)が得られる。

$$y_{0E} = \frac{f}{\sqrt{(1-h^2)^2 + 4h^2h^2}} \quad (10)$$

式(10)が、変位一定則に従う応答塑性率を表している。

一方、エネルギー一定則によれば、式(11)が成立する。

$$y_0 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{F_E}{F_y} \right)^2 + 1 \right\} \quad (F_E: \text{弾性応答せん断力}) \quad (11)$$

ここで、 $F_E = k_1 y_{0E} x_y$ および $F_y = k_1 x_y$ を考慮すれば、式(12)が得られる。

$$y_0 = \frac{1}{2} (y_{0E}^2 + 1) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{f^2}{(1-h^2)^2 + 4h^2h^2} + 1 \right\} \quad (12)$$

式(12)が、エネルギー一定則に従う応答塑性率を表している。

(2) 簡易応答評価と非線形定常応答との比較

式(10)および(12)を用い、先に説明した K-B 法による定常応答の結果と比較を行う。その結果を図-5 に示す。

図-5 によれば、振動数比 1 付近ではエネルギー一定則および変位一定則による簡易応答評価が非線形定常応答を大きく上回り、安全側の評価を示すことがわかる。しかしながら、振動数比が 1 より小さい帯域では、入力に加振レベルが増大する (f が大きくなる) につれて、非線形定常応答値が簡易応答評価を上回ることが示されている。これは、加振力の増大に伴い復元力の非線形効果が現れ、構造物のみかけの固有振動数が低下し低振動数領域において応答が増大するためと考えられる。

従来から作用地震動の速度応答スペクトルの第 1 折れ点周期より短い固有周期を有する構造物においては、エネルギー一定則が過小評価となることが指摘されている [たとえば梅村(1982), 島崎・和田(1993)]。この指摘は、上述の非線形効果に伴うみかけの構造物固有周期の変化が関係しているものと考えられる。一般にエネルギー一定則では、応答の非線形性に伴う減衰の効果を評価することで弾塑性応答を推定するのであるから、作用地震動と構造物の周期特性の相関関係を無視していると考えられる。したがって、エネルギー

一定則をより精度の高い応答評価式として改良するためには、周期特性に着目した検討が必要と考えられる。

なお、この点に関する評価式の改良については、他文献 [Paulay & Priestley(1992), 青戸・吉川(1999)] を参照されたい。

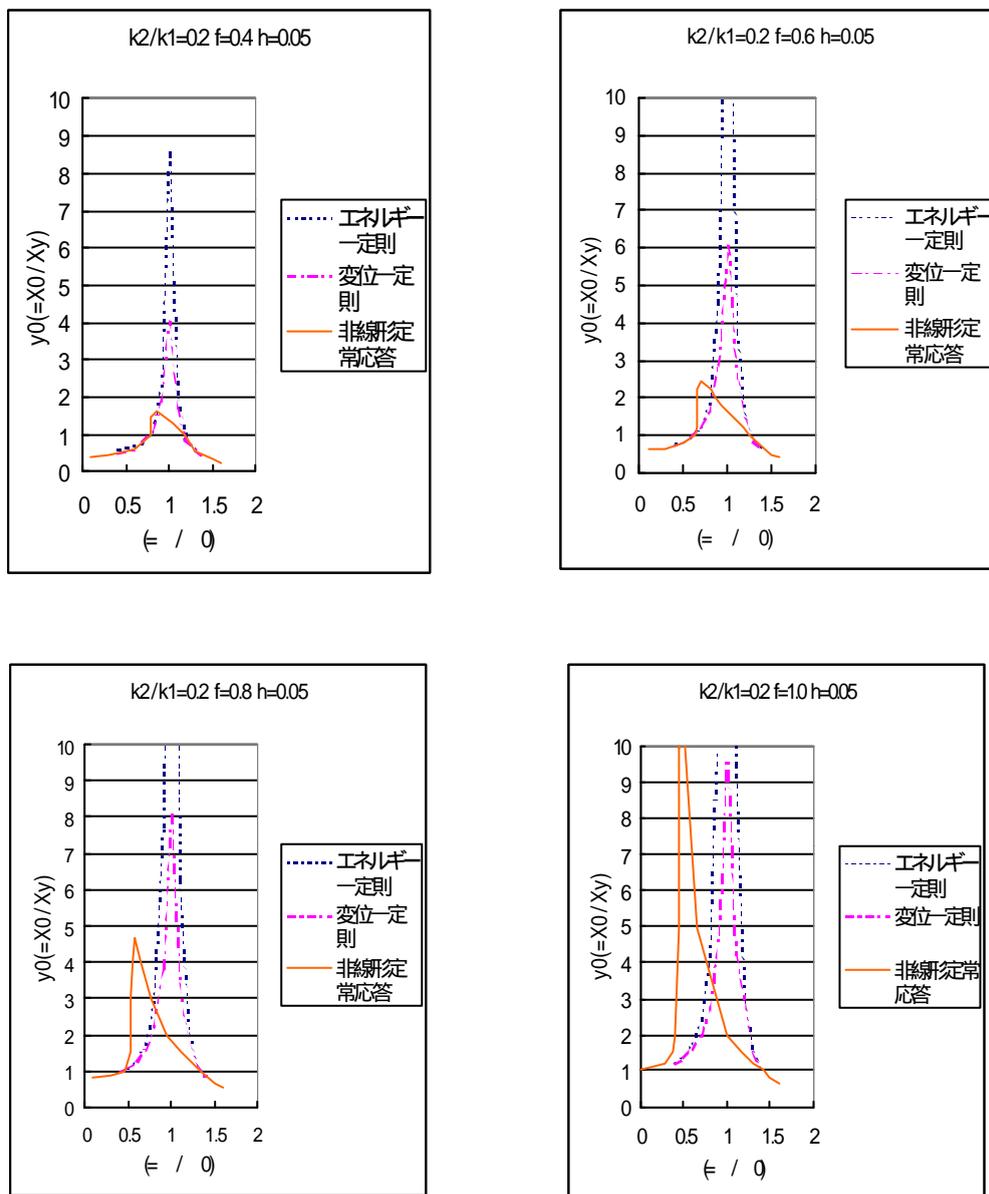


図-5 共振曲線の比較

6.まとめ

本検討の実施内容と得られた知見をまとめると、以下の通りである。

- (1)非線形振動系の定常応答を解析的に求める方法の一つである K-B 法を用いて、バイリニアー復元力特性を有する一自由度系の定常応答（共振曲線）を算定した。その結果、応答塑性率（応答変位の降伏変位に対する比）が振動数比（固有円振動数に対する外力の円振動数の比）、初期剛性に対する第 2 接線剛性の比および無次元加振力（降伏耐力に対する加振力の比）に依存することが示された。
- (2)パラメータ解析の結果、非線形系の特徴である、加振力の増大に伴う応答倍率の非線形性や共振振動数の低振動数側へのズレ（みかけの構造物固有周期の長周期化）が見られた。
- (3)非線形定常応答とエネルギー一定則および変位一定則による簡易評価式の比較を、正弦波加振時の共振曲線により実施した。その結果、応答値そのものは簡易評価の方が概ね安全側の結果となるが、応答がピークを示す振動数に違いが現れ、入力に加振レベルが増大するほどその差異が大きくなった。これは、簡易評価式において、作用地震動と構造物の周期特性の相関関係を無視しているためと考えられ、評価式の精度向上のためには、周期特性の考慮が重要になることを示唆するものである。

参考文献

- 1)土木学会(1989)：動的解析と耐震設計 [第 2 巻] 動的解析の方法, 技報堂出版
- 2)梅村魁(1982)：鉄筋コンクリート建物の動的耐震設計法・続（中層編）, 技報堂出版
- 3)島崎和司・和田章(1993)：鉄筋コンクリート構造の地震時水平変位, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 444 号
- 4)Pauley, T. , Priestley, M.J.N.(1992)：Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings, Wiley-Interscience
- 5)青戸拡起・吉川弘道(1999)：弾塑性系の荷重低減係数評価式に関する検討, 土木学会第 54 回年次学術講演会概要集第 部門