

コンクリートのひび割れモデルと有限要素解析

金刀 督純 (トータル・インフォメーション・サービス)

船山 哲 (トータル・インフォメーション・サービス)

吉川 弘道 (武蔵工業大学)

1 章

コンクリートの軟化挙動と等価エネルギー要素

第 1 章

コンクリートの軟化挙動と等価エネルギー要素

1.1 引張挙動の特徴 (post-peak behavior)

コンクリートのような複合材料 (cementitious composite material) が引張破壊するときの挙動は、破壊領域が局所化すること (strain localization) および準脆性的 (quasi-brittle) に崩壊に至ることが特徴的である [2][3]

例えば、コンクリート供試体の引張試験や曲げ試験では、最大荷重点に達する前に微細な初期ひび割れが発生・散在し、その後初期ひび割れは周りのひび割れと徐々に結合しながら成長し、最終的に局所化した一本のひび割れによって破断することとなる。これを荷重 - 開口変位関係においてみると、図 1.1 に示す最大荷重点 (A) 付近で初期ひび割れが発生し、それが徐々に周りのひび割れと結合しながら成長し (B)、最終的に破断 (C) することとなる。この引張破壊では、ひび割れの成長過程において巨視的に開口しているひび割れ先端に無視し得ない程の大きさの微細なひび割れが累積した破壊進行領域 (fracture process zone) と呼ばれる非線形領域が存在し、この破壊進行領域ではひずみの増加に伴い伝達される応力が低下する軟化 (softening) 現象が生じる。このように小規模降伏の条件が当てはまらない場合、線形破壊力学の範疇を越えてしまい、新たに非線形性の強い「コンクリートの破壊力学」が必要となり、ひび割れ先端での応力特性を表すパラメータとして線形破壊力学で用いる破壊靱性値に替る、破壊エネルギー (fracture energy) や引張軟化曲線といったパラメータが使用される。

このような挙動の特徴を理解するため、まず完全局所化状態と準局所化状態の引張挙動 [5] を考え、これを図-1.2 のような模式的に示した。両者は引張強度に達するまで ($s < f_t$) は同様の弾性的挙動を示すが、それ以降前者の場合、破壊領域が一面に集中し (2次元問題では直線上に)、後者ではある有限な l_{cr} に分布することが特徴的である。また、いずれも破壊領域外では弾性除荷していると考えられるもので、いわゆる弾性 / 塑性分岐 (elastic/plastic bifurcation) [6] を想定している。コンクリート材料の場合、単純引張下では完全局所化状態、圧縮荷重下で準局所化状態、さらには多軸荷重下において (圧縮) 静水圧の増加により、非局所化状態 (一様塑性状態) になると考えられる。しかし、実際には単純引張応力場にあっても、微小ではあるが有限な破壊進行領域を形成するので [7]、これら 2つの状態は理想化されたモデル化と考えている。

数値解析において、完全局所化状態では、ひび割れの位置や経路をあらかじめ決めておき、ひび割れ面に位置する部分に幾何学的な大きさの無いひび割れに垂直な方向のバネと、水平な方向のバネをひび割れとして配置する離散ひび割れモデル (discrete crack model) によって表現される。一方、準局所化状態では、ひび割れ発生後、ひび割れ直交方向の剛性を修

正することにより、ひび割れコンクリートを直交異方性体として表現する分布ひび割れモデル (smeared crack model) によって表すのが自然な方策であると言える。さらにこれらを有限要素法に適用する場合、前者はいわゆる仮想ひび割れモデル [8] (fictitious crack model) を、後者は要素単位でひび割れを表現するひび割れ帯モデル (crack band model) を採用するのが常套手段であると言える [9] [10]。しかし、完全局所化状態を表現するために仮想ひび割れモデルを用いた場合、

- ・ ひび割れ経路は、あらかじめ定義した要素の境界に限定されるため実際のひび割れ挙動と異なる場合があり、物理的な現象の記述が不正確である。
- ・ ひび割れの増分に伴って別の自由度が付加されなければならないため、演算量が増し、構造剛性マトリックスのバンド幅が増加して解析の規模が大きくなる。

などの不都合が生じる。このため多くの研究者は引張ひび割れのような完全局所化状態 (あるいは準局所化状態であっても局所化領域が要素寸法より著しく小さい場合) においても離散化ひび割れの制約条件から分布ひび割れモデルを採用することが多く、そのための方策が主たる論点となっている [11] [12]。本論においても、このような立場をとり与えられた仮想ひび割れモデルを分布ひび割れモデルに変換し、有限要素解析を実行するものである。

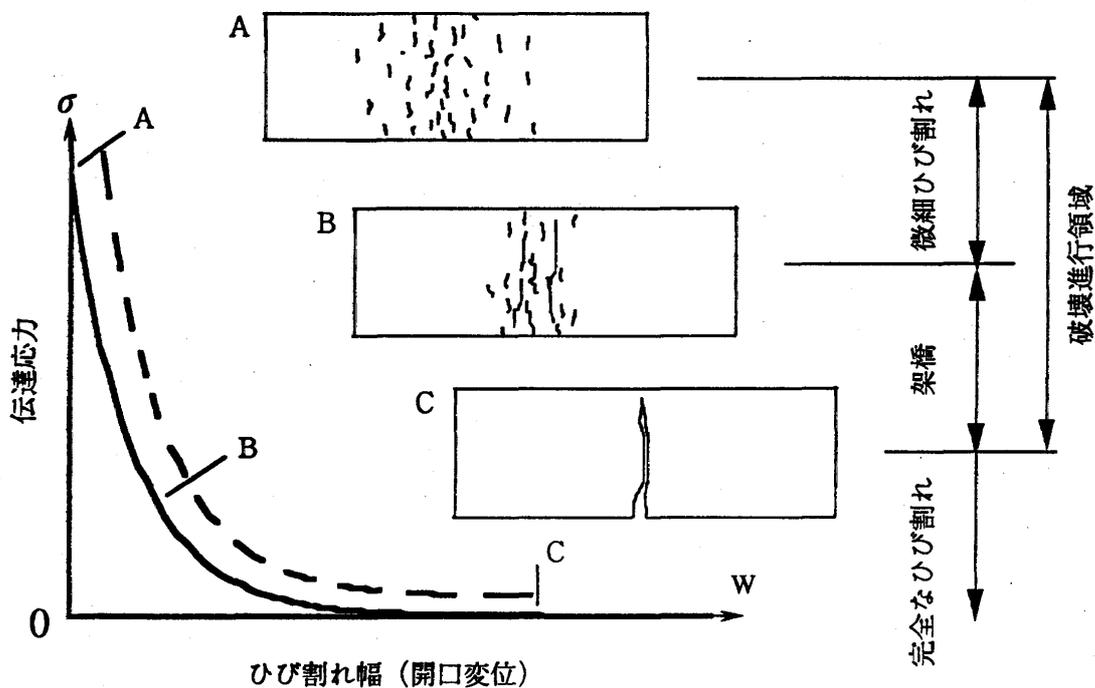
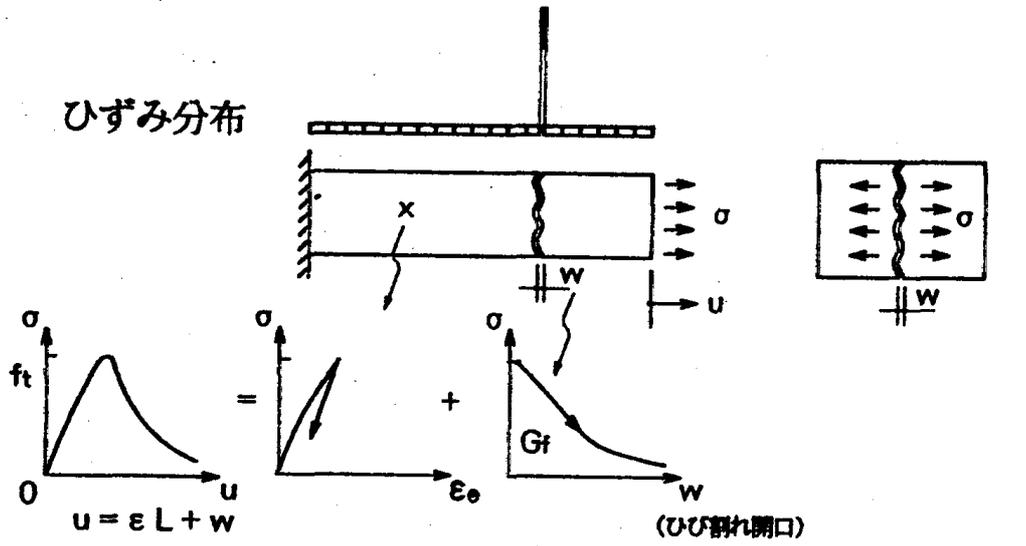
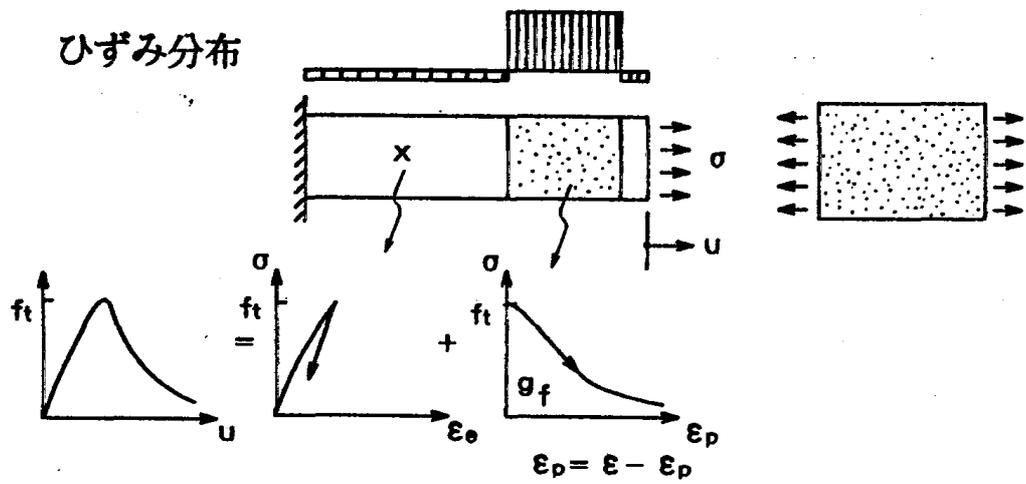


図 1.1 : 荷重 - 開口変位曲線 (模式図) [4]



(a) 完全局所化状態 (perfect localization)



(b) 準局所化状態 (semi localization)

図 1.2 : 完全局所化状態と準局所化状態

1.2 引張軟化曲線 (fictitious crack model)

仮想ひび割れモデルを表す引張軟化曲線は、通例ひび割れ直交方向に作用する応力 σ とその開口変位 w によって表される。

$$\sigma = F(w) \quad G_f = \int_0^{\infty} F(w)dw = \int_0^{w_0} \sigma dw \quad (1.1)$$

そして、上式第 2 式が示すように、引張軟化曲線の囲む面積は主ひび割れが単位面積あたり進展するのに必要な平均的なエネルギー (破壊エネルギー単位: G_f (単位: $N/mm^2 / mm = N/mm$)) して定義され、材料特性の一つである (図-1.2 (a))。このような σ - w 関係は、応力 σ - ひずみ ϵ 関係で表されるこれまでの構成方程式とは異なることはよく知られている。

ただし、ここで示す σ については、その考え方によりいくつかの異なる呼称法があり、ここに付記したい。これはひび割れ面に作用する応力 (applied stress) として解釈され本論でもそのように用いるが、これまでの破壊力学で用いられてきた Dugdale-Barenblatt モデルでは結合力 (cohesive force) と呼ばれ [13]、類似するものとしてひび割れ閉合力 (crack closure stress)、伝達応力 (transmitted stress) と称されることもある。

また、引張軟化曲線の具体的なモデル化についてはこれまで多くの提案があり (文献 [3], [14], [15] に詳しい)、主要モデルとして次のようなものがある。

- ・ 直線モデル、2 直線モデル (1/3 モデル, 1/4 モデル)、多直線モデル
- ・ 正規化した e 関数法 (Planas / Elices)
- ・ 分数関数法 (Hawkins et al.)

一般に、コンクリート部材の最大荷重についてのみ検討する場合には、最も単純な直線モデルで十分であるといわれているが、最大荷重以降の破壊過程も含めて荷重 - 変位曲線を検討するには、実際の引張軟化曲線の形状に近い多直線モデルや曲線モデルを用いる方が望ましく、2 直線モデルによっても実際の荷重 - 変位曲線をよく近似する。

1.3 等価エネルギー要素 (equivalent smeared crack model)

1.1 に示したように、本文では仮想ひび割れモデルなどによって記述される完全局所化状態を分布ひび割れモデルによって解析することを考える。この場合いくつかの克服すべき論点があり、これらは局所化状態において要素の安定化(well-posedness)と要素寸法の依存性(mesh-dependence)に集約され、いくつかの数学的手法が試行されてきた(例えば、[12][16])。

ここでは、これらのうち最も一般的な手法として破壊エネルギーの等価性から要素寸法の非依存性を導くもので、次のようにまとめられる。すなわち、分布ひび割れを用いた有限要素一個で消費されるエネルギーと、局所化したひび割れ界面で消費されるエネルギーが等価になるように調整するものである(図-1.3)。

そこで、前者を $G_{element}$ 、後者を G_{actual} とすると、これらは次のように表される。

$$G_{element} = \int_V \mathbf{s}(\mathbf{e}) dV = A \cdot l_e \cdot g_f \quad (1.2)$$

$$G_{actual} = \int_A \mathbf{s}(\mathbf{w}) dA = A \cdot G_f \quad (1.3)$$

ここで、 A : 要素断面積、 l_e : 要素寸法、 V : 要素体積、 G_f : 材料の破壊エネルギー(面積あたり)、 g_f : 分布ひび割れモデルでの破壊エネルギー(体積あたり)である。

G_{actual} における G_f は材料としての性質であり、実験から求められる。これに対し、 $G_{element}$ ではこれを等価になるように l_e もしくは $\mathbf{s}(\mathbf{e})$ の降下曲線を調整する必要があり、これは、

$$G_{element} = G_{actual} \quad (1.4)$$

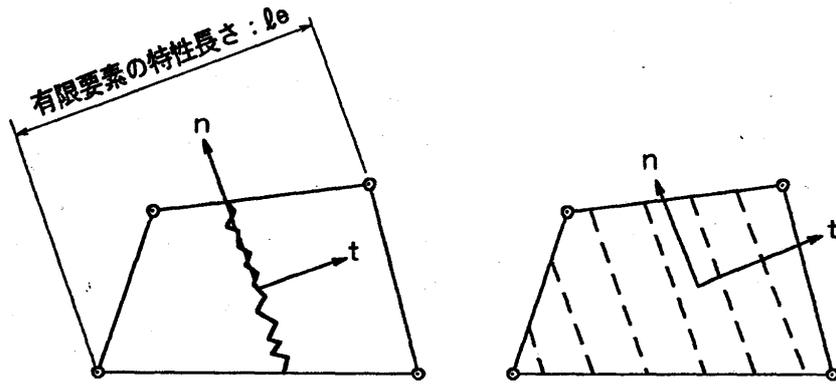
とすることにより定めることができる。例えば、最も単純な場合として、一直線軟化モデル $\mathbf{s} = H\mathbf{e}$ ($H = \text{一定の勾配} < 0$) を考えると、この時の軟化勾配 H は、

$$H = -\frac{\mathbf{w}_0 f_t^2}{2G_f} \quad (1.5)$$

のように表される

本文では、Planas/Elices モデル[15]を単純化した次のような指数関数を用いる(図-1.4)。

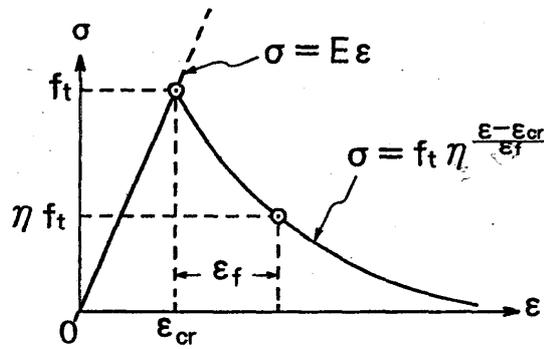
$$\mathbf{s}(\mathbf{e}) = f_t \cdot \mathbf{h}^{\frac{\mathbf{e} - \mathbf{e}_{cr}}{e_f}} \quad (1.6)$$



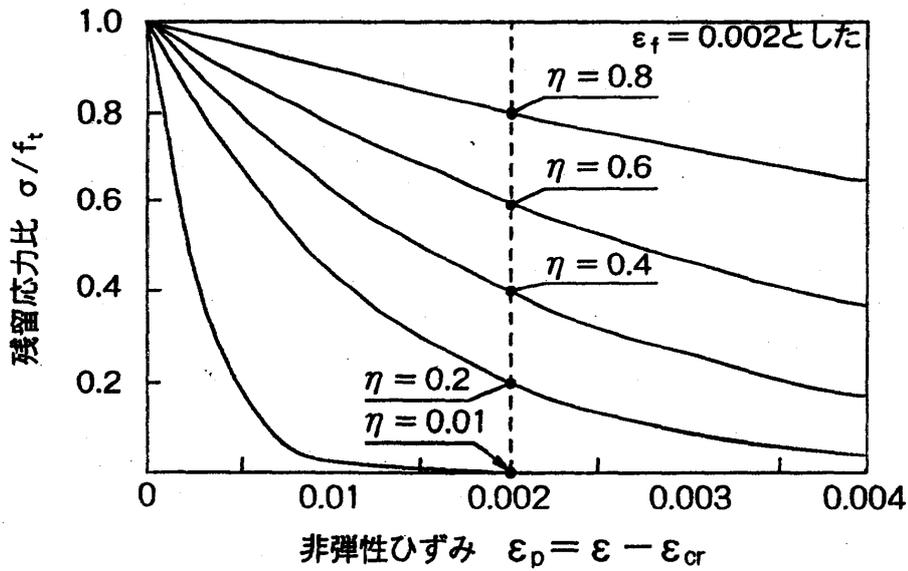
(a) 要素内における局所的ひび割れ

(b) 要素内における分布処理

図 1.3 : 等価エネルギー要素による分布ひび割れモデル



(a) 軟化曲線の定義



(b) $\frac{\sigma}{f_t} \sim \epsilon_p$ 関係 (パラメトリックシミュレーション)

図 1.4 : 採用した引張軟化曲線 (分布ひび割れモデル)

ここで、 f_t : ひび割れ発生強度、 e_{cr} : 応力が f_t のときのひずみ、である。また、 h, e_f は軟化曲線の形を特定するもので、降下の度合いを表すパラメータとなる (図-1.4 (a)) (上式では、 e_f が e_{cr} に近づくほど、あるいは h が小さいほど降下の度合いが大きいことを表し、したがって G_f は小さくなる。) このような指数関数は、1.2 に例示した Planas / Elices による e 関数法をよく近似し、かつ h, e_f の 2 パラメータで簡潔に用いることから導入したものである。

この式 (1.6) を用いた場合、分布ひび割れモデルにおける破壊エネルギー g_f は次のようにして求められる。図-1.5 に示すようにピーク応力を境にピーク以前 g_{f1} 、ピーク以後 g_{f2} に分けて考える。まず、ピーク以前は弾性挙動することを仮定すると、

$$g_{f1} = \int_0^{e_{cr}} \mathbf{s}(\mathbf{e}) d\mathbf{e} = \frac{1}{2} f_t \cdot \mathbf{e}_{cr} \quad (1.7)$$

となる。次に、ピーク以降は非線形に降下する式 (1.6) を用いて、

$$g_{f2} = \int_{e_{cr}}^{\infty} \mathbf{s}(\mathbf{e}) d\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}_f \cdot f_t}{-\ln(\mathbf{h})} \quad (1.8)$$

と表される。よって、 $g_f = g_{f1} + g_{f2}$ より、

$$g_f = \left(\frac{\mathbf{e}_{cr}}{2} - \frac{\mathbf{e}_f}{\ln(\mathbf{h})} \right) \cdot f_t \quad (1.9)$$

さらに、式 (1.4) のような等価式を適用すると次式が得られる [17]、

$$A \cdot G_f = A \cdot l_e \left(\frac{\mathbf{e}_{cr}}{2} - \frac{\mathbf{e}_f}{\ln(\mathbf{h})} \right) \cdot f_t$$

よって

$$\mathbf{h} = \exp \left\{ -\mathbf{e}_f \left(\frac{G_f}{l_e \cdot f_t} - \frac{f_t}{2E_c} \right)^{-1} \right\} \quad (1.10)$$

または

$$\mathbf{e}_f = -\ln(\mathbf{h}) \left(\frac{G_f}{l_e \cdot f_t} - \frac{f_t}{2E_c} \right) \quad (1.11)$$

すなわち、与えられた材料特性値 (E_c, f_t, G_f) および有限要素の特性寸法 l_e によって、 h または e_f を決定するものである。また、上式では、 G_f が小さいとき l_e が大きいと要素単位で不安定状態 (snapback) となり、これは数学的には

$$\frac{G_f}{l_e \cdot f_t} - \frac{f_t}{2E_c} > 0 \quad (1.12)$$

のように示される。

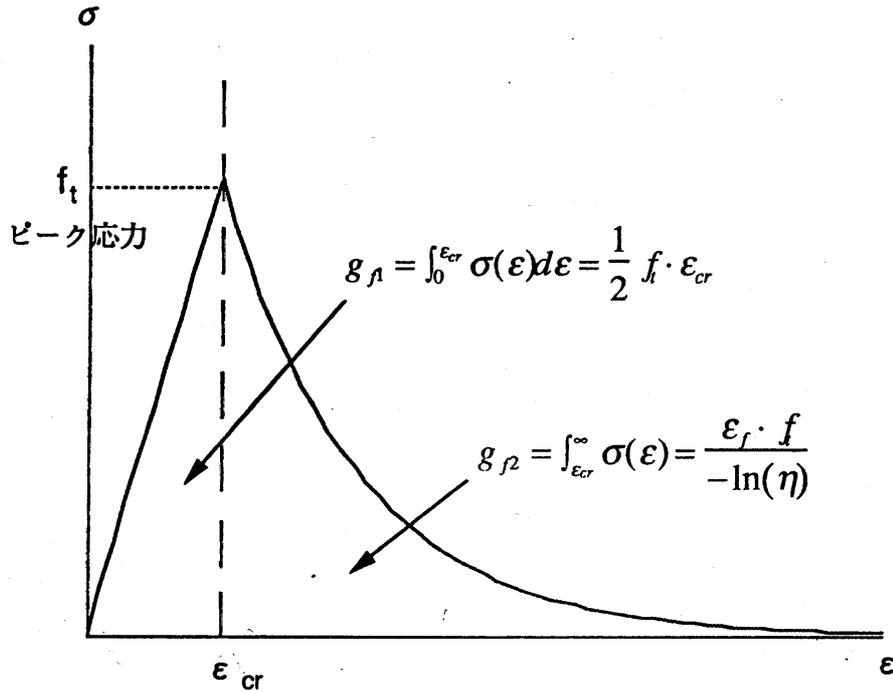


図 1.5 : g_f の導出

ここで、破壊力学パラメータとして、次の 2 式

特性長さ (characteristic length) : $l_{ch} = \frac{E_c G_f}{f_t^2}$

・脆さ数 (brittleness number) : $B = \frac{l_e}{l_{ch}}$

を用い、式 (1.12) に代入すると次式が得られる (ただし、脆さ数 B については要素寸法 l_e に対する比として定義している)。

$$l_e - \frac{1}{2} l_{ch} > 0 \quad \text{または} \quad B > \frac{1}{2} \quad (1.13)$$

すなわち、上式が 1 有限要素での安定条件から得られた制約条件である。

また、式 (1.10) の h に対しても特性長さを用いると、

$$h = \exp \left\{ -\frac{e_f E_c}{f_t} \left(\frac{l_{ch}}{l_c} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \right\} \quad (1.14)$$

のようにも換えられる。

以上の手法は、いわば要素寸法に依存した軟化係数 (mesh-dependent softening modulus) と呼ばれ、Pietruszczak ・ Mroz [12] Willam et al. [18] によって推奨されているが、本文はこれを具体的な非線形軟化曲線に対して適用したものである。

1.4 等価エネルギー要素の軟化・除荷・再結・再軟化モデル

ここでは、1.3 にて定義した引張軟化曲線をさらに一般化モデルとするため、除荷/再結モデルを加えるものとする。

このためまず、図-1.6 において 0 ~ a : 弾性、a ~ b : 軟化継続とする。そして、増分計算内 (もしくは iteration 内) にて増分ひずみが負値と検知された場合 (図中 b 点) 除荷状態とみなす。このときの除荷剛性 E_{um} は、除荷判定時点 (図中 b 点) のひずみと応力を e_0 、 s_{cr} とし (したがって、 $e_0 > e_{cr} = f_t/E_e$, $s_0 < f_t$) 次式のようにモデル化する (図-1.6 (a))。

$$\Delta e < 0 \quad \rightarrow \quad E_{um} = fE_0$$

$$\text{ただし、} E_0 = \frac{s_0}{e_0}, f = \frac{e_0}{e_0 - e_{um}}$$

ここで、 E_0 は除荷判定点 b での割線剛性を意味し、また e_{um} は除荷直線の $\sigma = 0$ 上の目標点を表し、 e_{um} または f を解析者が指定する (例えば、 $f = 1$ とすると原点指向、 $f = \infty$ とすると直下に降下する)。

また、除荷過程において引張ひずみ e が e_r 以下になると、これを弾性剛性に復帰する再結状態 (図-1.6 (b) 中の c 点) と呼び、これを以下のように表す。

$$e < e_r \quad \rightarrow \quad E_r = f'E_e \quad (0 < f' < 1)$$

ここで、 f' は弾性剛性 E_e に対する再結後の剛性の低減率を表し、解析者が定めるものとする。

さらに、除荷継続途中において増分ひずみが正值となった場合は再び軟化状態になったとみなし、再結後の剛性 E_r にて応力が増加し、破壊基準以降 ($s > f_t$) は始めに定義した軟化曲線上をたどるものとする。

すなわち、コンクリートの軟化挙動は、

- ・弾性 除荷

(図-1.6 に示す 0 ~ a ~ 0)

- ・弾性 軟化継続

(0 ~ a ~ b)

- ・弾性 軟化 除荷 再結 (除荷継続)

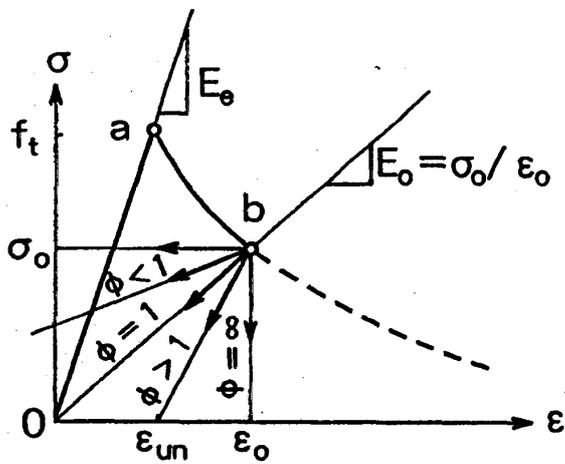
(0 ~ a ~ b ~ c ~ d)

- ・弾性 軟化 除荷 再軟化

(0 ~ a ~ b ~ c ~ b)

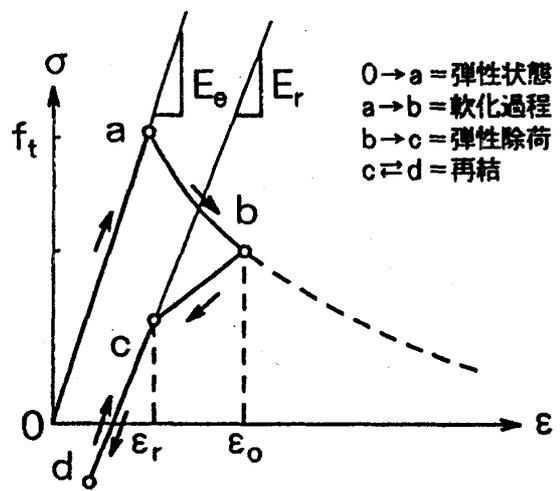
のいずれかのように変遷するものである。

(a) 除荷勾配



• 除荷勾配 : $E_{un} = \phi E_0$
 $\left(E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \phi = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - \epsilon_{un}} \right)$

(b) 除荷～再結モデル



• 再結勾配 : $E_r = \phi' E_e$
 $(0 < \phi' < 1, 0 \leq \epsilon_r < \epsilon_0)$

図 1.6 : 引張軟化曲線と除荷・再結モデル

2 章

等価エネルギー要素の有限要素法への適用

第 2 章

等価エネルギー要素の有限要素法への適用

ここで、前章までに定義・モデル化した分布ひび割れ型の構成方程式を離散化し、有限要素法に適用する。

2.1 等方弾性体の構成則

引張応力下にあるコンクリートは、通例弾性状態から塑性状態を経験することなく、ひび割れの発生に至る。したがって、最初のひび割れ発生基準は等方弾性体について考え、応力基準によって判定される。そこで、まず等方弾性体 (isotropic elastic) の構成方程式を以下に示す。

まず、単軸部材については、簡単に $\mathbf{s} = E\mathbf{e}$ の用に表されるが、多軸応力場では次式となる。

$$\{\mathbf{s}\} = [D_e]\{\mathbf{e}\} \quad (2.1)$$

ここで、剛性マトリックス $[D_e]$ の代表的なものとして以下のようなものがある。ただし、 E = 弾性係数、 ν = ポアソン比とする。

平面応力：

$$[D_e] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

平面ひずみ：

$$[D_e] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

軸対称回転体：

$$[D_e] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

3次元：

$$[D_e] = \frac{E(1-n)}{(1+n)(1-2n)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{n}{1-n} & \frac{n}{1-n} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n}{1-n} & 1 & \frac{n}{1-n} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n}{1-n} & \frac{n}{1-n} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2n}{2(1-n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2n}{2(1-n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2n}{2(1-n)} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

非弾性問題 (inelastic problem) においては、これらの $[D]$ が応力やひずみ等によって変化するが、基本的な考え方は弾性問題とかわらず、区間線形法として増分形式 $\{d\mathbf{s}\} = [D]\{d\mathbf{e}\}$ を採用し、各荷重段階に応じた $[D]$ が用いられる。

2.2 初期ひび割れと発生基準

材料に生じる最初のひび割れ (initial crack) は通例、主応力 (平面問題では \mathbf{s}_1 と \mathbf{s}_2) によって判定される。この時、第1主応力を \mathbf{s}_1 、第2主応力を \mathbf{s}_2 ($\mathbf{s}_1 > 0, \mathbf{s}_1 \geq \mathbf{s}_2$) とすると、次のような二つの基準に大別される。

・最大主応力基準 (Rankine の破壊基準)

第1主応力 \mathbf{s}_1 のみで判定するもので、引張強度を f_t とすると、簡単に次式で与えられる。

$$\mathbf{s}_1 \geq f_t \quad (2.6)$$

・2軸主応力基準 (Kupfer の破壊基準)

第2主応力 \mathbf{s}_2 の影響を考慮するもので、その符号により次の2式で表現される。

・引張 - 引張 ($\mathbf{s}_1 > 0, \mathbf{s}_2 > 0$) :

$$\frac{\mathbf{s}_1}{f_t} \geq 1.0 - a \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_1} \quad (2.7)$$

・引張 - 圧縮 ($\mathbf{s}_1 > 0, \mathbf{s}_2 < 0$) :

$$\left(\frac{\mathbf{s}_1}{f_t} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{s}_2}{f'_c} \right)^2 \geq 1.0 \quad (2.8)$$

ここで、 a は実験定数で $a = 0.3$ が用いられ、 f'_c は単軸圧縮強度を表わす。

以上の2つの発生基準を破壊包絡線として示すと、図-2.1のように示すことができる。

いずれの場合もそのひび割れ発生基準を満足すると、第1主応力（引張主応力）と直交する方向にひび割れが形成されることになる。そして、一旦、ひび割れが発生すると、その材料はひび割れ発生方向の直交異方性体となる。それまで蓄積された引張応力は解放され、剛性は低下することになる。

本文では、平面応力場で解析するため剛性マトリックス $[D_e]$ は式(2.2)を採用し、 $s_1 \geq f_t$ をもってひび割れが発生したものとみなし（Rankineの破壊基準）、先に示した式(1.10)の h によって応力を低下させる。

ただし、ひび割れ後は、それまで用いてきた全体座標（ xy 座標）とひび割れ方向での局所座標（ nt 座標）を定義する必要があり、これを図-2.2に示した。ここで、 $n = normal$ （直交方向）、 $t = tangential$ （接線方向）を表し、後述する記号の添字としても用いられる。また、全体座標系と局所座標系との交角を q としている。

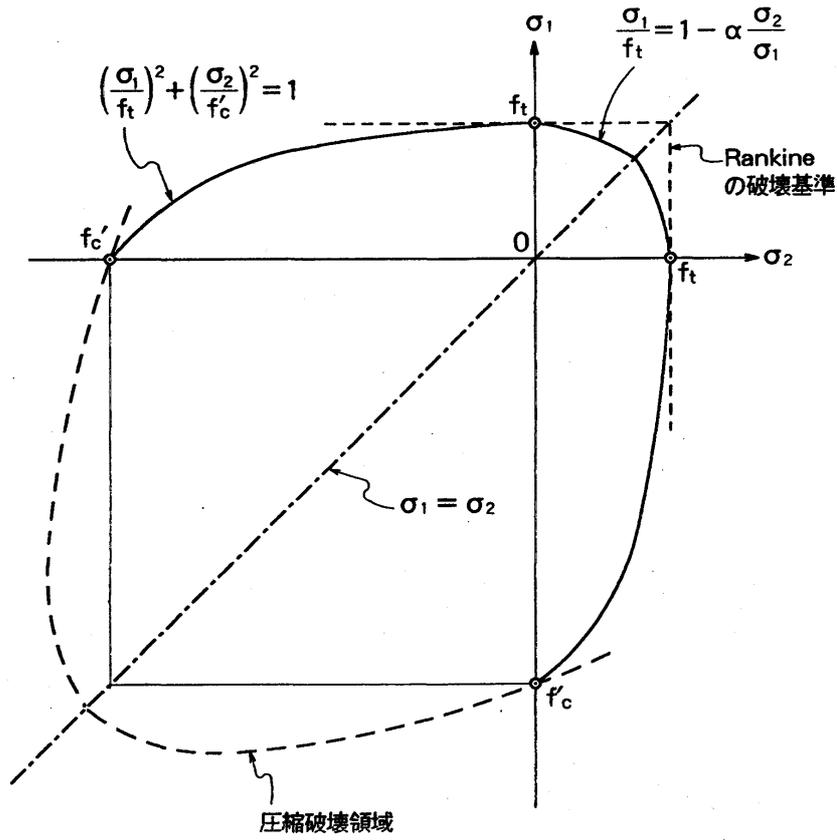


図 2.1 : コンクリートの破壊包絡線 (2 軸主応力)

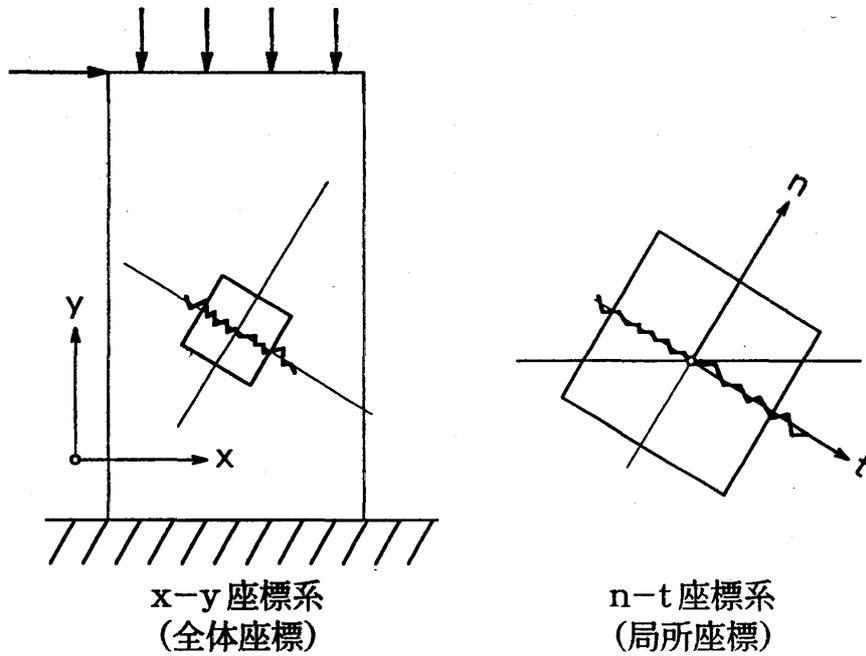


図 2.2 : 全体座標と局所座標

2.3 ひび割れ挙動の解析方法

以上のようなひび割れ発生後の挙動を解析する場合、剛性変化法、応力緩和法、混合法などが用いられる。

剛性変化法 (stiffness variable method)

初期ひび割れ以降、弾性係数を除々に低減させ、材料の劣化を表わすものである(図-2.3)。一次元問題では、ひび割れ直交方向の弾性係数 E_n を

$$E_e \rightarrow E_n = \mathbf{b}E_e \quad (\mathbf{b} : \text{弾性係数の低減係数}) \quad (2.9)$$

のように置き換え、低減係数 \mathbf{b} ($= 0 \sim 1$) によって表わすものである。

一方、2次元問題に対して、ひび割れ面のせん断剛性 G_m も低下させる場合には、次式のように置き換える。

$$[D_e] \rightarrow [D_{cr}] = \begin{bmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_t & 0 \\ 0 & 0 & G_m \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\text{ただし、} E_n = \mathbf{b}_n E, G_m = \mathbf{b}_t G$$

ここで、 $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_t$ は、それぞれひび割れ直交方向と接線方向の弾性係数の低減係数を表わす。また、ひび割れ平行方向の弾性係数 E_t (せん断応力場では、通例圧縮となる) についても、ひび割れの発生・進展によって間接的に影響を受けることが実験的に認知されている。なお、ひび割れ発生後では通例、ポアソン効果は消失すると考え、上記の材料マトリックスでは、 $\mathbf{n} = 0$ となっていることを付記する。

また、このような増分解析における剛性変化法では、 $\mathbf{b}_n = \mathbf{b}_t = 0$ としても応力が低下する軟化現象を表現することはできず、このためには次の応力緩和法が必要となる。

応力緩和法 (stress release method)

応力緩和法は、図-2.4 のように緩和応力 \mathbf{s}_0 (released stress) を与えることにより強制的に応力を低下させ、軟化現象を再現するものである。すなわち、

$$d\mathbf{s} = E_e d\mathbf{e} - \mathbf{s}_0 \quad (2.11)$$

$$\text{ただし、} \mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_{elastic} - \mathbf{a}f_t$$

これは、図中の応答経路 $a \rightarrow b \rightarrow c$ のように推移するもので、 \vec{ab} が $d\mathbf{e}$ に対する弾性応答増分 $E_e d\mathbf{e}$ 、点 b が暫定応力 $\mathbf{s}_{elastic}$ を表わし、 \vec{bc} が応力緩和 \mathbf{s}_0 であり、 c が最終目標点 $\mathbf{s} = a f_t$ となる。ここで、 f_t は材料の引張強度、 a は f_t に対する残留応力比 ($a = 1 \sim 0$) を表わす。

一方、2次元問題(平面応力場)に対しては、増分ひずみ $\{d\mathbf{e}_n, d\mathbf{e}_t, d\mathbf{g}_{nt}\}'$ に対して、次式のように記述される。

$$\begin{Bmatrix} d\mathbf{s}_n \\ d\mathbf{s}_t \\ d\mathbf{t}_{nt} \end{Bmatrix} = [D_e] \begin{Bmatrix} d\mathbf{e}_n \\ d\mathbf{e}_t \\ d\mathbf{g}_{nt} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

ここで、 $[D_e]$ は前述の等方弾性体の剛性マトリックスである。

混合法 (mixed method)

これまでに導入した各種低減係数を表 2.1 にまとめ、表中には対応する破壊モードと破壊エネルギーを示した。さて、このような剛性変化法を応力緩和法に対して、実際の解析では併用して用いることが多く、これを混合法と呼ぶ。すなわち、混合法による次のような増分形構成則が一般的と言える。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d\mathbf{s}_n \\ d\mathbf{s}_t \\ d\mathbf{t}_{nt} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{nt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{e}_n \\ d\mathbf{e}_t \\ d\mathbf{g}_{nt} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_e & 0 & 0 \\ 0 & E_e & 0 \\ 0 & 0 & G_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{e}_n \\ d\mathbf{e}_t \\ d\mathbf{g}_{nt} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

したがって、上式を用いると、合計量である全応力ベクトル $\{\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_t, \mathbf{t}_{nt}\}'$ に対しては、

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_n \\ \mathbf{s}_t \\ \mathbf{t}_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_n = f_t \\ \mathbf{s}_t \\ \mathbf{t}_{nt} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -(1-a_n)f_t \\ \sum E d\mathbf{e}_t \\ \sum \mathbf{b}_t G d\mathbf{g}_{nt} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

のように合算されることになり、右辺第一項がひび割れ発生前までの応力ベクトル、第二項が発生後の加算される応力ベクトルを表わす。

以上までの考察から、表-2.1 に示した4個の低減係数に対して次のことが言える。すなわち、本書で対象とするような Mode 型のひび割れに対しては、直交成分に対する残留応力の低減係数 a_n が最も重要であり、ひび割れ後の軟化挙動を支配し、残留剛性の低減係数 b_n は本質的な機能はなく、微小値 ($b_n \doteq 0.1 \sim 0.01$) をとることにより、速い収束を助長する。

一方、せん断成分に対しては、残留剛性の低減係数 b_t が意味を持ち、残留応力の低減係数 a_t は用いられない。 b_t はひび割れ面のせん断伝達 (shear transfer) を支配するもので、

せん断剛性の有効率 (shear retention factor) とも呼ばれる。

したがって、 $\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_t$ が最も重要な係数となることがわかるが、ここで $\mathbf{b}_n = 0$ として剛性マトリックスを書き直すと、これは

$$\text{残留剛性} : [D_{cr}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_e & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_t G_e \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\text{残留応力} : \mathbf{s}_n = \mathbf{a}_n f_t \quad (2.16)$$

のように記述することができる。上記2式が分布モデル (smeard model) を用いたときの最も一般的なひび割れモデルであり、準脆性材料の構成則として多用されている。さらに、 $\mathbf{a}_n = 0$ もしくは $f_t = 0$ とすると、これは無引張解析 (nontention analysis) と呼ばれ、最も単純化したひび割れモデルとして知られている。

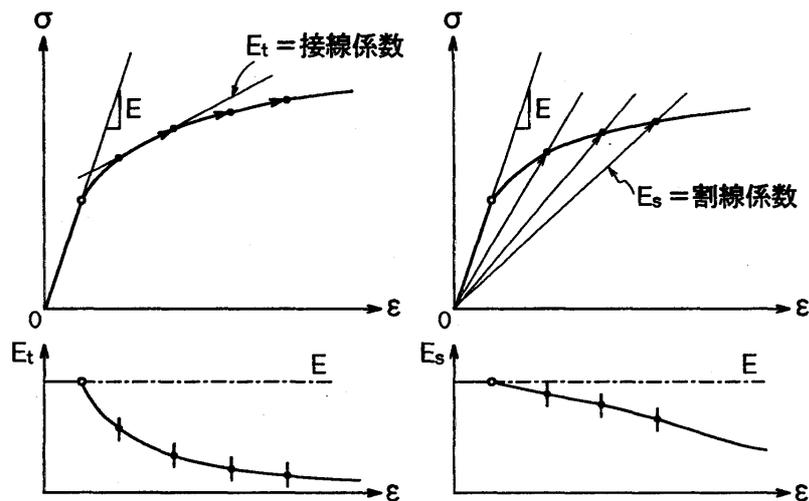


図 2.3 : 接線係数と割線係数

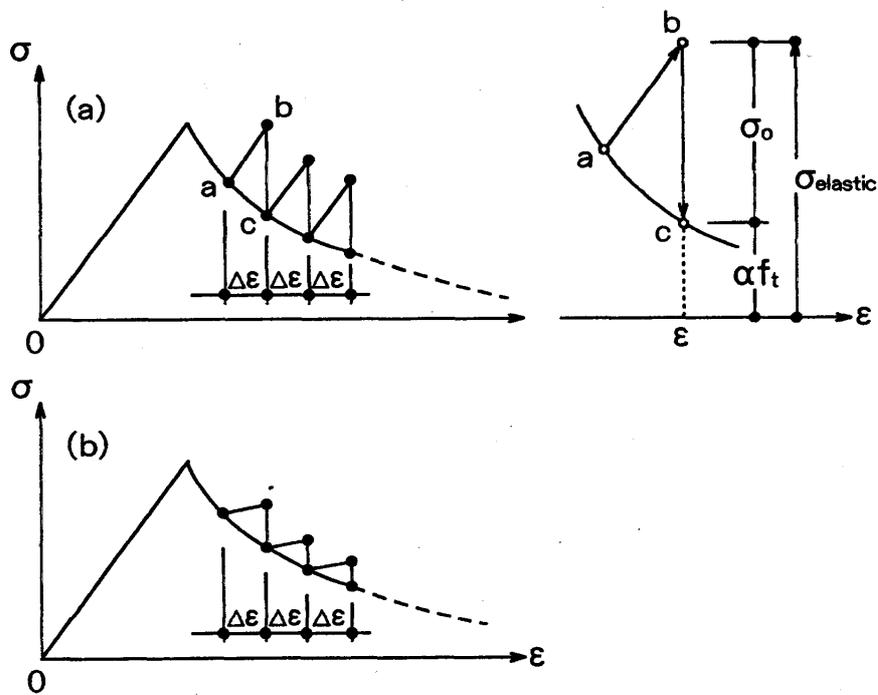


図 2.4 : 応力緩和法による軟化解析

表 2.1 : 残留応力と残留剛性に対する低減係数と対応する破壊エネルギー

	直交成分	せん断成分
残留応力比	a_n	(a_t)
残留剛性比	b_n	b_t
破壊エネルギー	G_f^1	G_f^2

2.4 有限要素法における剛性方程式

以上までに定式化された構成方程式を用い、今度は有限要素解析を実行するための剛性方程式について検討を行う。

変位法に基づく有限要素の解析の定式化については、仮想仕事の原理が多用されるが、弾性問題については次式のような要素剛性方程式 (element stiffness equation) が用いられる。

$$\{P\} = \int_V [B]^T [D_e] [B] dv \{u\} \quad (2.17)$$

ここで、 $\{P\}$ は節点荷重ベクトル、 $\{u\}$ は節点変位ベクトル、 $[B]$ は $\{e\} = [B]\{u\}$ なるひずみ～変位変換マトリックスを表わし、 V は要素体積を示す。また、上式は、

$$\{P\} = [K_e]\{u\} \quad , \quad [K_e] = \int_V [B]^T [D_e] [B] dV \quad (2.18)$$

のように表現することができ、 $[K_e]$ は要素剛性を表わしている。

本文のようなひび割れ問題についても仮想仕事の原理は同様に有力な方法である。ここでは、定式化の過程は省略して結果のみを示すと、次のような3式にて表現することができる。ただし、 $\{P\}, \{u\}$ は通例、増分ベクトルとなるが、簡単のため省略するものとする。

$$\{P\} = \int_V [B]^T [D_{cr}] [B] dV \{u\} \quad (2.19)$$

$$\{P\} = \int_V [B]^T [D] [B] dV \{u\} = \int_V [B]^T \{s_0\} dV \quad (2.20)$$

$$\text{ただし、} \{s_0\} = \{s^*\} - \{s\}$$

$$\{P\} = \int_V [B]^T [D] [B] dV \{u\} - \int_V [B]^T [D] \{e_{cr}\} dV \quad (2.21)$$

最初の式 (2.19) は、式 (2.10) に等価剛性マトリックス $[D_{cr}]$ を用いたもので、剛性自身を変化させるものである。次に、式 (2.20) は応力緩和法における緩和応力ベクトルとして $\{s_0\} = \{s^*\} - \{s\}$ を用いたもので、これを右辺第2項の等価節点にて表現している。ただし、 $\{s^*\}$ を暫定応力ベクトル、 $\{s\}$ を $s_n = a_n f_t$ として含む残留応力ベクトルである。式 (2.21) は、損傷ひずみベクトル $\{e_{cr}\}$ を取り込んだもので、右辺第2項の等価節点力として表現している。

ここで、これら3式の右辺各項のうち、ひび割れを含むコンクリートとしての要素剛性マトリックスを $[K_{cr}]$ として、

$$[K_{cr}] = \int_V [B]^T [D_{cr}] [B] dV \quad (2.22)$$

のように定義する。また、損傷ひずみベクトル（初期ひずみ）に対する等価節点力を $\{P_{cr}\}$ 、損傷応力ベクトル（初期応力）を $\{P_0\}$ として、下式のようにおく。

$$\{P_0\} = -\int_V [B]\{s_0\}dV \quad (2.23)$$

$$\{P_{cr}\} = -\int_V [B][D_e]\{e_{cr}\}dV \quad (2.24)$$

そして、これらを整理すると、式（2.19）～（2.21）の要素剛性方式は以下のように簡略化した表示を伴うことができる。

$$\{P\} = [K_{cr}]\{u\} \quad (2.25)$$

$$\{P\} - \{P_0\} = [K_e]\{u\} \quad (2.26)$$

$$\{P\} - \{P_{cr}\} = [K_e]\{u\} \quad (2.27)$$

また、式（2.26）の右辺の $[K_e]$ 項で、 $[D_e] \rightarrow [D_{cr}]$ のように置き換えるとこれは混合法となり、残差荷重が少なくなり、収束性が改善される。すなわち、これら3者は、各々剛性変化法 (variable stiffness method)、初期応力法 (initial stress method)、初期ひずみ法 (initial strain method) にそのまま対応していることがわかる。言い換えると、本論で展開したひび割れコンクリートの構成方程式が、有限要素法における材料非線形問題の代表的3手法（例えば、文献 [19]、[20] に詳しい）に帰着することを明示したものである。このことは、また本モデルが従来の汎用有限要素コードに容易に導入し得ることを示唆するものである。

ただし、得られた係数マトリックス（例えば $[K_{cr}]$ ）が非対称形となることがあり、このとき数値解析に際しては剛性行列をフルマトリックスとして処理することを免れない。このような場合、大自由度の構造系を取り扱う時は、多くの計算労力を強いられるので、非対称剛性マトリックスの非対角項を

$$[\tilde{K}_{cr}] = \frac{1}{2}([K_{cr}] + [K_{cr}]^t) \quad (2.28)$$

のように対称化して運用するものも、実用的な簡素化の一方法と考えられる。

ただし、上添字 t は転置を示す。

3 章

有限要素法による数値計算例

第 3 章

有限要素法による数値計算例

3.1 要素寸法非依存性の確認

さて、以上までに詳述した等価エネルギー要素を用いて、一様応力場における有限要素解析を実行し、まず要素寸法の非依存性について考察したい。ただし、解析に際しては非線形汎用コード [21] を用いた。

分布ひび割れモデルを用いてひび割れを表現する場合、有限要素法における要素サイズ（要素幅 l_e ）によって解析結果が異なることがあり、要素寸法依存性（mesh-dependence）として指摘されている。つまり、たとえ同一解析者であっても要素分割の方法（一要素当たりの大きさ）によって全く異なる結果が得られることとなる。現在、要素寸法の非依存性に関する研究が多数試されているが、いずれも制約条件が多く汎用的でないのが現状である。本文で提案する等価エネルギー要素は、式 (1.10) に示すように要素寸法 l_e 、破壊エネルギー G_f によって軟化係数 h が変化する点に特徴がある。

解析対象として図-3.1 のような単純引張部材（平面応力場）を用い、全長 L （ $L = 30\text{cm}$ ）を一定とし、中央部ひび割れ発生要素の長さ l_e をパラメータとし、 $l_e = 1, 2.5, 5, 10\text{cm}$ の 4 種類に変化させた。また、その他のパラメータは表-3.1 のような値を用い、右端全体を強制変位制御により解析した。ただし、図中 l_0 区間の要素は弾性要素とし、ひび割れを許容しないものとしている。Case1 ~ 4 の計算条件を図-3.1、表-3.1、軟化係数値を表-3.2 に、解析結果を図-3.2 に示した。

計算上、中部区間 l_e にのみひび割れを許容した破壊シミュレーションにおいて、異なる l_e に対して同一の軟化勾配（ $h = 0.4$ ）を与えた場合（図-3.2 (a)）、その全体挙動は要素寸法 l_e の影響を受け、 l_e が大なるほど急激な応力低下を呈する。一方、式 (1.10) により与えられた破壊エネルギー G_f と要素寸法 l_e によって軟化勾配を調整した場合、（図-3.2 (b) : $G_f = 0.15\text{N/mm}$ 、図 3.2 (c) : $G_f = 0.3\text{N/mm}$ ）ほぼ同一の結果を得ることができた。

以上のような手法による要素寸法による解析結果の依存性の回避は、いわゆる localization limiter の一手法としては初等的手法であり、もう一つの克服点である要素配向による依存性（mesh-alignment sensitivity）についての検討は不十分である。しかし、後述する Mode 型のひび割れを誘発する単軸引張部材では十分である。

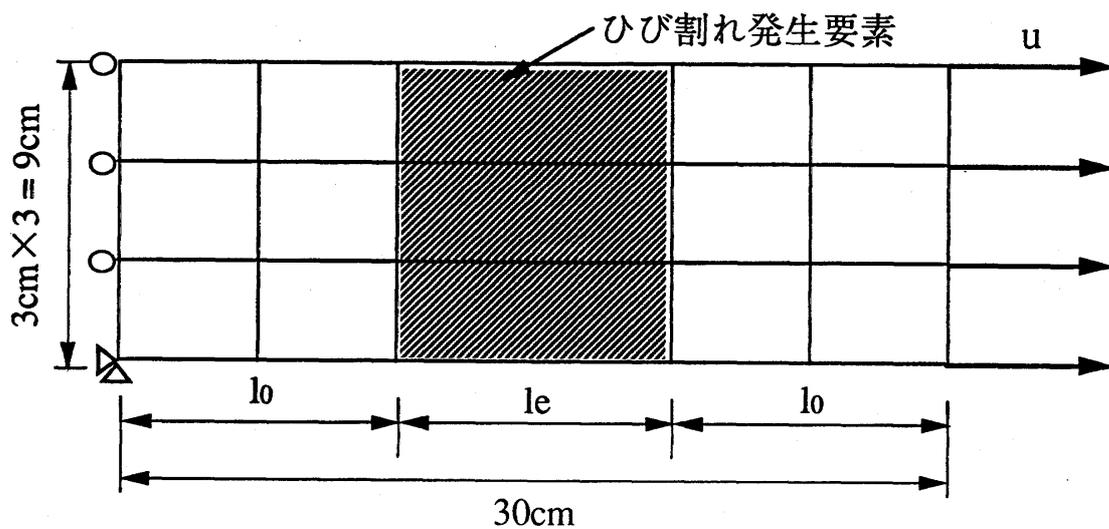


図 3.1 : 要素寸法依存性についての FEM 解析の概要

表 3.1 : 解析条

全長	: L	(cm)	30
ひび割れ要素幅	: l_e	(cm)	1, 2.5, 5, 10
断面積	: A	(cm^2)	9
弾性係数	: E_c	(MPa)	3×10^4
ポアソン比	: ν		0.0001
引張強度	: f_t	(MPa)	2

表 3.2 : 数値シミュレーションにおける軟化係数 h の値

ケース No.	l_e	軟化係数 h を一定としたもの	等価エネルギー要素	
			$G_f = 0.15 N/mm$	$G_f = 0.3 N/mm$
case-1	1cm	0.4	0.914	0.954
case-2	2.5cm	0.4	0.789	0.889
case-3	5cm	0.4	0.619	0.789
case-4	10cm	0.4	0.373	0.619
備考	$e_f = 0.0007$ とした $h = \exp \left\{ -e_f \left(\frac{G_f}{l_e f_t} - \frac{f_t}{2E_c} \right)^{-1} \right\}$			

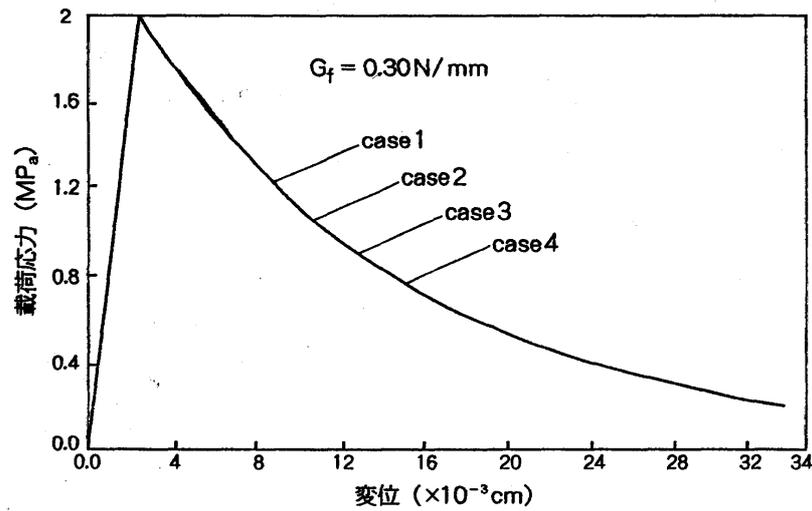
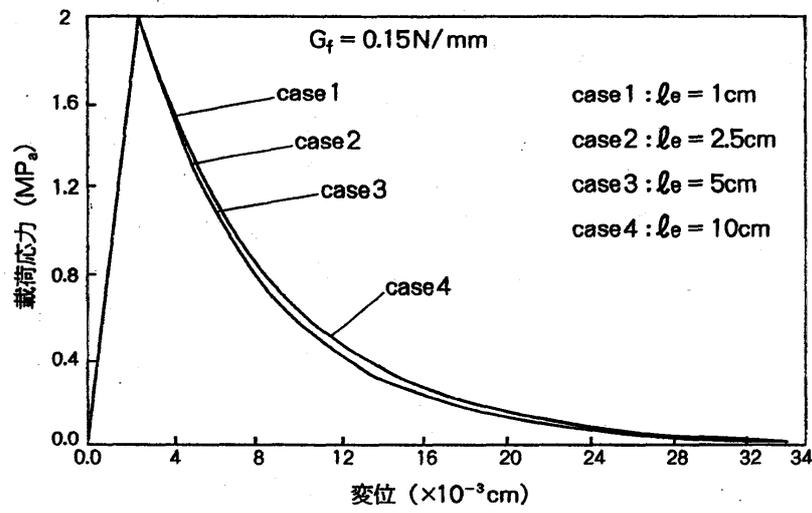
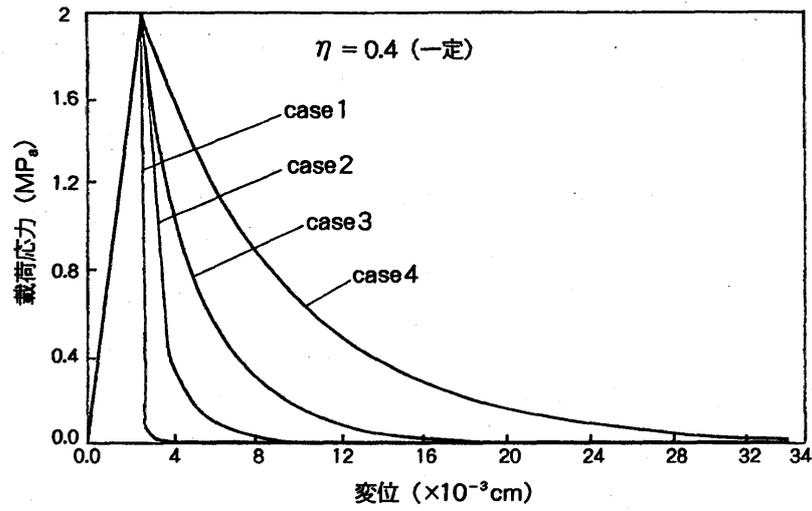


図 3.2 : 引張部材の解析結果

3.2 一様応力場における解の一意性の喪失

次に、一様応力状態にある単軸引張部材の破壊シミュレーションを実行し、各要素（もしくは各積分点）の引張破壊 / 軟化 / 除荷の変遷の様子を観察する。

そこで、図-3.3 に示すように平面部材を 200 要素に分割し、全要素に同一の強度基準 ($f_t = 2 \text{ MPa}$) および軟化定数 ($h = 0.5134, e_f = 0.002$) を与える。このようなモデルに左端固定、右端変位制御にて載荷し計算を実行した。ただし、ここでは右端変位増分の標準値として、最大荷重以降 $\Delta u = 5 \times 10^{-4} \text{ mm}$ とするが、ひび割れ発生後の載荷途中においてこれを 10 倍にし、除荷を誘発した。

その結果、図-3.4 に示すような載荷応力 s と変位 u との関係を得ることができた。これは、 $\Delta u = 5 \times 10^{-4} \text{ mm}$ の基準値にて増分変位を付与し続けた場合 (case0)、 $s = f_t (= 2 \text{ MPa})$ にて全要素一斉に引張破壊し、その後全要素とも引張軟化を継続した。すなわち、全域一様塑性状態を維持することを意味し、その挙動は完全弾塑性に近いものとなった。一方、ひび割れ発生後の載荷途中である 200step ($u = 12.95 \times 10^{-2} \text{ mm}$)、500step ($u = 27.95 \times 10^{-2} \text{ mm}$)、700step ($u = 37.95 \times 10^{-2} \text{ mm}$) にて増分変位量を 10 倍にすると、それ以降一部の要素が除荷状態となり、このため $s \sim u$ 曲線は急激に降下した。これは、一様応力状態ではあるが、要素によって引張軟化と弾性除荷が混在し、擬似的ではあるがひずみの局所化が生じたことになる。ただし、変位増分を大きくすることにより収束繰り返し回数は増大するが、いずれの場合も節点力の誤差ノルムによる釣合い条件は満足されており、軟化・除荷に伴う残差力は解消されている。

これらの解析結果は、ある外荷重 $P = sA$ に対して、異なる変位が応答することになり、解が複数存在することを意味する。すなわち、解の一意性が失われていることとなり、軟化材料によるこのような特徴は古くから指摘されており [22] [23]、本節ではこのことを数値計算にて再現したものである。

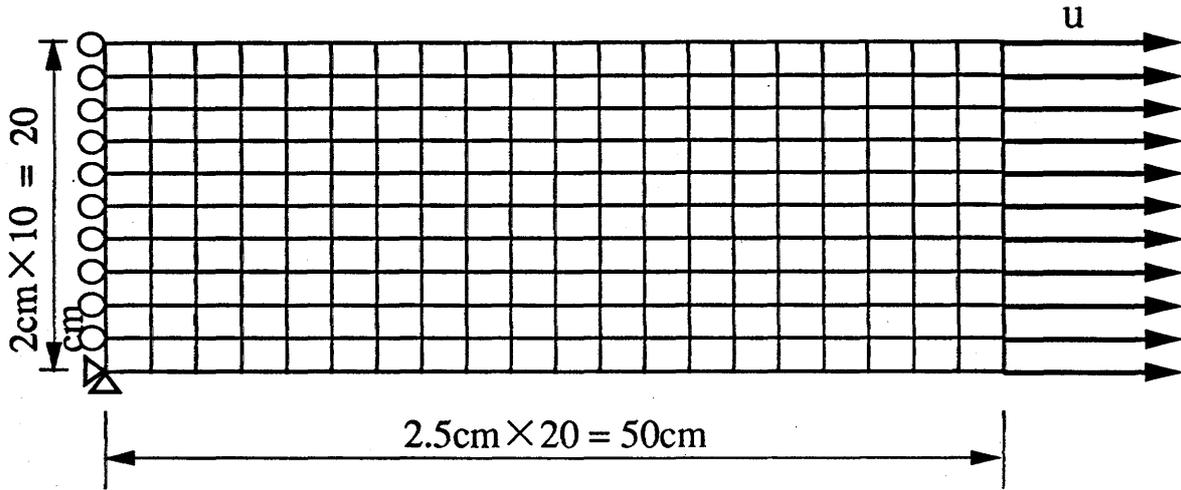


図 3.3 : 解析条件

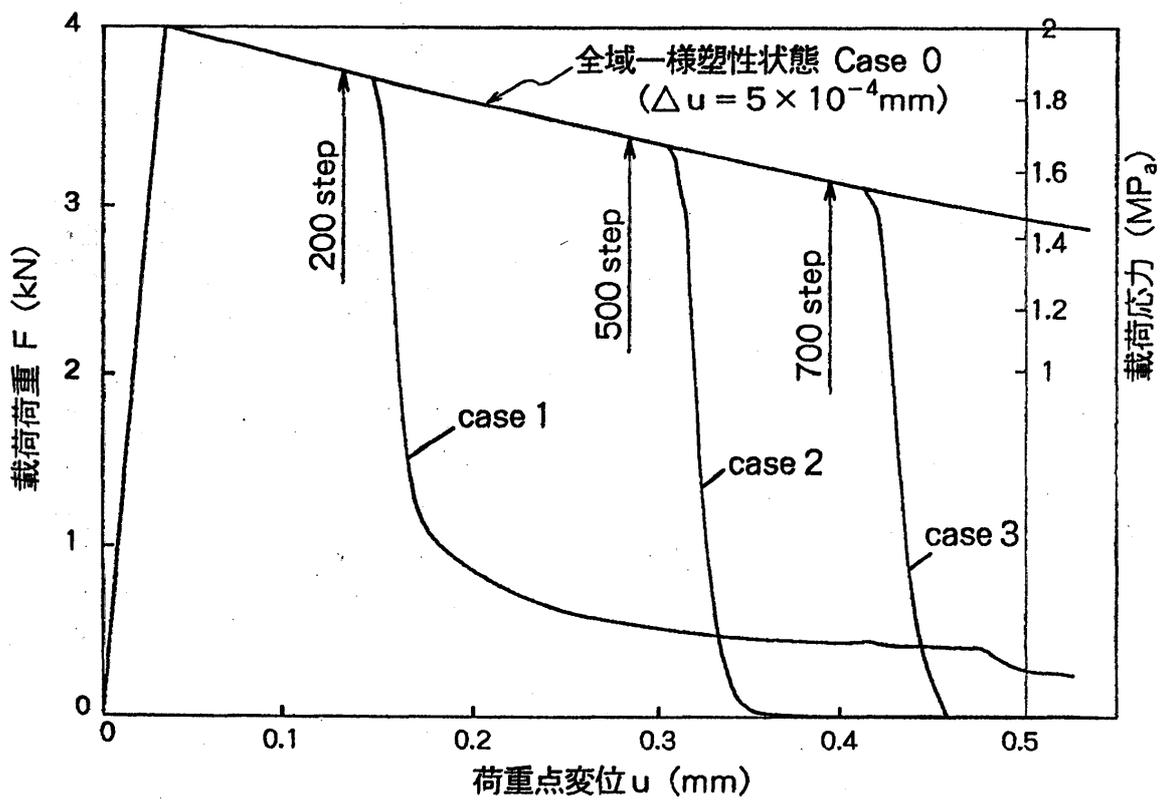


図 3.4 : 載荷応力 s と変位 u との関係

参考文献

- [1] コンクリート標準示方書（平成3年版）設計書、土木学会、1991
- [2] Mazars, J. and Bazant, Z.P.: Cracking and Damage, Elsevier Applied Science, 1989
- [3] 例えば、JCI破壊力学委員会：コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム、第4章 ひび割れコンクリートの数値解析、1990
- [4] Horii, H.: Models of Fracture Process Zone and a System of Fracture Mechanics for Concrete and Rock, Proc. of Int. Workshop on Fracture Toughness and Fracture Energy, Snergy, Sendai, pp.325-337, 1988
- [5] 吉川弘道、西岡真帆：ひずみの局所化領域を有するコンクリート単軸部材の変形挙動と安定／不安定条件、コンクリート工学論文集、第6巻第1号、pp.89-101, 1995
- [6] Yoshikawa, H. and Willam, K.: Analysis of localized failure in elastoplastic Solids, in IUTAM Symp, Mechanics of Brittle Disordered Materials, Concrete, Rock and Ceramics, E&FN SPON, pp.464-478, 1995
- [7] 大塚浩司、勝部宏明：コンクリートの破壊進行領域の性状に及ぼす骨材寸法の影響、土木学会論文集、No.478/V-21, pp.109-116, 1993.11
- [8] Hillerborg, A. et al.: Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements, Cement and Concrete Research, Vol.6, pp.773-782, 1976
- [9] Kwak, H.-G. and Filippou, F.C.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads, Structural Engineering Mechanics and Materials, pp.23-28, 1990
- [10] 吉川弘道：コンクリート構造物の設計法としてのFEM解析、コンクリート工学、Vol.30, No.9, pp.65-71, 1992
- [11] Bazant, Z.P. and Oh, B.H.: Crack band theory for fracture of concrete, in Materials and Structures (RILEM, Paris), 16 (93), pp.155-177, 1983
- [12] Pietruszczak, S.T. and Mroz: Finite Element Analysis of Strain Softening Materials, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10, pp.327-34, 1981
- [13] 岡村弘之：線形破壊力学入門、培風館、1984年
- [14] 三橋博三（研究代表者）：コンクリートの高強度化と寸法効果に関する破壊力学的研究、平成4年度科学研究費補助金（一般研究（C））研究成果報告書、1994
- [15] Planas, J. and Elices, M.: Nonlinear Fracture of Cohesive Materials, International Journal of Fracture 51, pp.139-157, 1991
- [16] SLuys, L.J.: Wave Propagation, Localisation and Dispersion in Softening Solids, pp.48-49, 1992
- [17] 西藤厚、吉川弘道、金刀督純：引張強度のばらつきと距離相関を考慮したコンクリートの破壊シミュレーション、コンクリート工学論文報告集、第17巻 第2号、pp.1329-1340, 1995

- [18] Willam , K. , Hurlbut , B. and Sture , S. : Experimental , Constitutive and Computational Aspects of Concrete Failure , Seminar on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures , Volume 1 , pp.149-171 , 1985
- [19] Chen , W.F. (色部誠・河角誠・安達洋 監訳): Plasticity in Reinforced Concrete (コンクリート構造物の塑性解析), 丸善 , 1985
- [20] Zienkiewicz , O.C. (吉識雅夫・山田嘉昭 監訳): The Finite Element Method (3rd edition) (マトリクス有限要素法 三訂版), 培風館 , 1993
- [21] 材料非線形汎用コード Total-RC v.3 : 理論マニュアル、1986 年
- [22] Maekawa , K. , Yamazaki , J. and Higai , T. : Numerical Problems in Non-Linear Finite Element Analysis of The Post-Failure Behavior of Structural System , Seminar on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures , Volume2 , pp.275-28 , 1985
- [23] 中村光、田辺忠顕 : 鉄筋コンクリートはりのポストピーク挙動に関する解析的研究、土木学会論文集、No.490 / V-23 , 1994.5