

ひずみの局所化領域を有するコンクリート単軸部材の変形挙動と安定/不安定条件

吉川 弘道*1・西岡 真帆*2

概要 本論文は、準局所化状態および完全局所化状態にあるコンクリート単軸部材を対象とし、その変形挙動と安定/不安定条件について考察し、基本式の定式化およびいくつかの興味ある数値シミュレーションを呈示するものである。変形挙動については、局所領域が規定されたときの、荷重方向のひずみ分布を平均化した等価剛性および snapback 時の安定的な増分計算法について述べる。また、安定解析については、非弾性状態に対するポテンシャルエネルギーの第2変分を定式化し、その安定/不安定条件を導出するとともに、圧縮荷重を対象とした準局所化状態に対する不安定運動エネルギーを提案するものである。

キーワード 準局所化状態/完全局所化状態、ひずみの局所化、等価構成則、スナップバック/スナップダウン、安定/不安定条件、ポテンシャルエネルギーの第2変分、不安定運動エネルギー

1. まえがき

コンクリートで代表される準脆性材料は、塑性変形過程もしくは軟化過程にひずみが局所化すること (strain localization) が古くから知られており、構造不安定や寸法効果 (size effect) を引き起こす要因となっている。このため、破壊力学の応用やエネルギー原理の適用など、多くの研究が活発になり、1980年代における Concrete Mechanics の主要な論点となっている (例えば、文献 1), 2), 3), 4))。しかし、これまでの研究は、3次元場における解析的な取扱いや、もしくは実験的な検証であるため、例えば、コンクリートにおける局所化の発生に伴う諸現象を単純化し、その基本的な特徴を理解するには必ずしも適当でないことは否めない。

そこで、本研究は、ひずみの局所化を単純な単軸部材に理想化し、主として、代数方程式とエネルギー原理により基本的な解析解を提示するとともに多くの数値シミュレーションを実行するものである。すなわち、圧縮および引張荷重を受ける等断面単軸部材を対象とし、応力は一様状態であるが、軟化する領域と除荷する領域の両者が存在する場合を想定する。そしてこのような部材の平均的な応力~ひずみ (または変形) 関係の記述方法と安定/不安定条件について考察することを目的とする。

ところで、コンクリート材料の場合、局所化の様子は、圧縮と引張で大きく異なることが特徴的である (例

えば、文献 3), 5), 6))。Fig. 1 は、その力学的特徴と、応力ピーク以降の荷重方向の変形分布を模式的にまとめたものである (Δu は変位増分、 $\Delta \epsilon$ はひずみ増分を表し、荷重方向の増分を正とする)。これは、(a) のような一様な変形の弾塑性状態に対して、(b) は圧縮荷重下の場合を示したもので、局所化した塑性状態の材料

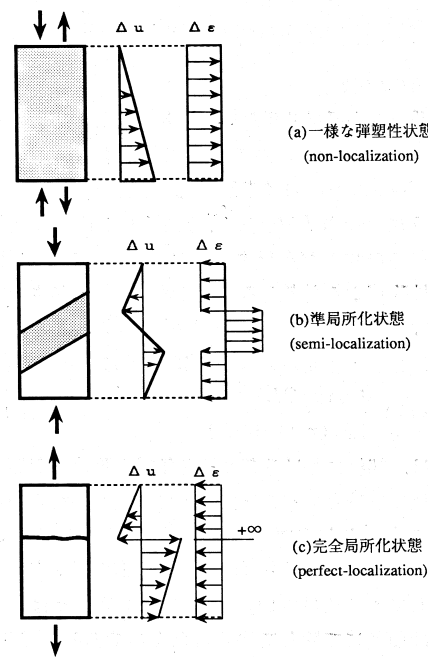


Fig. 1 Classification of strain localization in concrete and strain/deformation Distribution

*1 武蔵工業大学助教授 工学部 土木工学科 (正会員)

*2 武蔵工業大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (正会員)

がある領域を有するものである。また、(c)は引張荷重下のそれを図示したもので、塑性領域がほぼある一面に局所化する。これらを、それぞれ (a) 非局所化状態 (non-localization), (b) 準局所化状態 (semi-localization), (c) 完全局所化状態 (perfect-localization) と呼ぶことにする。このような変位場の仮定は、土質材料で言えば、Ladeが定義した line failure および zone failure⁷⁾ の中間状態に相当する。荷重状態によっては、(b)と(c)の中間的な領域が存在し、また塑性の進行によって、(b)→(c)に遷移することも考えられるが、ここでは大略の分類をまず考える。

ただし、せん断帯 (shear band) と称される様に、局所帯が荷重方向にある傾きをもつことがあるが、ここでは、局所帯が完全に直交する場合 (破壊力学での MODE I に相当する) のみを考える。

すなわち、理想した単軸部材に限定し、準局所化状態にある圧縮部材および完全局所化状態にある引張部材を対象とし、その力学的挙動を考察するものである。このため等価な (平均的な) 構成方程式を定式化し、さらに snapback 状態における安定的な増分計算方法についても述べるものである。

加えて、ポテンシャルエネルギーの第2変分により、両ケースに対する部材の安定/不安定条件を導出し、いくつかの数値解析を例示する。また、部材の不安定性について考察を進め、その不安定エネルギーの定量化方法について提案した。

2. 等価構成則の導出 (準局所化状態)

2.1 問題の設定

圧縮荷重 σ を受ける単軸部材を対象とし、応力ピーク以降に、塑性ひずみがある領域に集中する局所化状態 (strain localization) を想定する。すなわち、Fig. 2 に示すように、長さ L の部材のうち、 ΩL にて軟化状態となり塑性ひずみが進行する一方で、残りの $(1-\Omega)L$ では弾性除荷すると考える。塑性軟化領域の長さの割合を表現する無次元量 Ω は、 $0 \sim 1$ の範囲で与えられる。従って、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}(x)$ は次式のように表される。

$$\dot{\epsilon}(x) = \begin{cases} \dot{\epsilon}_t(x; \Omega L) \\ \dot{\epsilon}_u(x; (1-\Omega)L) \end{cases} \quad (1)$$

式(1)は、部材における塑性軟化領域と弾性除荷領域の実際の位置を特定することはできないが、それらの占める領域の大きさが重要であることを表している。ここで、部材軸に沿った任意断面における応力は一定であると仮定しても矛盾はない。(ここに示す応力 σ は、載荷荷重を断面積にて除して得られたものである。) 諸記号の定義については、Table-1 に一覧化した。添字 t は、塑性状態にあるときのコンクリートの接線係数

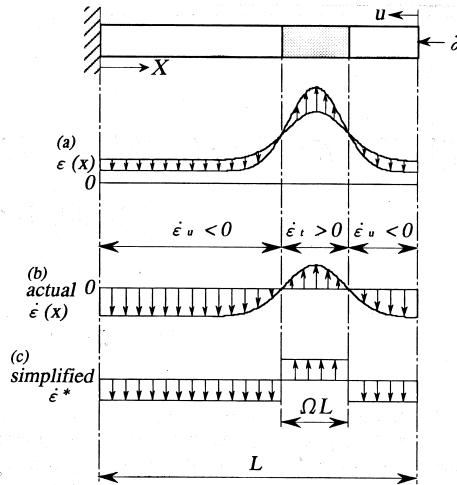


Fig. 2 Strain Distribution along the semi-Localized Member

Table 1 Variables Defined and Results Formulated in this study for semi-localization

	Length	Applied stress	Young's Modulus	Strain
softening region (fracture)	ΩL	σ	$E_t < 0$	ϵ_t $\dot{\epsilon}_t > 0$
unloading region (elastic)	$(1-\Omega)L$	σ	$E_u > 0$	ϵ_u $\dot{\epsilon}_u < 0$
total deformation	L	σ	$E^* = \frac{E_t}{(1+k)\Omega - k}$	$\dot{\epsilon}^* = \dot{u}/L$ $= \Omega \dot{\epsilon}_t + (1-\Omega) \dot{\epsilon}_u$

(tangential) を表し、 u は弾性除荷時 (unloading) を示している。

2.2 等価構成則の導出

次に、各々の領域について次のような構成関係式を定義する。

$$\text{塑性軟化領域: } \dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon}_t, E_t = E_t(\epsilon_t) < 0 \quad (2)$$

$$\text{弾性除荷領域: } \dot{\sigma} = E_u \dot{\epsilon}_u, E_u = E_u(\epsilon_u) > 0 \quad (3)$$

本研究では応力ピーク以降における局所化の進行過程を想定している。式(2)は $\dot{\epsilon}_t > 0$ 、式(3)は $\dot{\epsilon}_u < 0$ となることを示唆している。これは、分岐状態のモード分類⁸⁾から言えば、塑性/弾性一分岐 (elastic plastic bifurcation) を仮定していることに他ならない。

一方、 $\dot{\epsilon}^*$ は平均化したひずみ速度として導入され、次式のように定義する。

$$\dot{\epsilon}^* = \frac{1}{L} \left(\int_{\Omega L} \dot{\epsilon}_t(x) dx + \int_{(1-\Omega)L} \dot{\epsilon}_u(x) dx \right) \quad (4)$$

ここで、簡単のために、対応する領域の範囲内でひずみは一様であると仮定すると (Fig. 2 (c)), 平均化したひずみ速度 $\dot{\epsilon}^*$ について最終的に次式を得る。

$$\dot{\epsilon}^* = \Omega \dot{\epsilon}_t + (1-\Omega) \dot{\epsilon}_u \quad (\because \dot{u} \equiv \dot{\epsilon}^* L) \quad (5)$$

上式は、局所化した単軸部材における、ひずみの適合条件として解釈される。

以上の条件に基づき、応力速度 $\dot{\sigma}$ ~平均化したひずみ速度 $\dot{\epsilon}^*$ の関係式(構成則)を導くことができ⁹⁾、次式のように表される。

$$\dot{\sigma} = \frac{E_t}{(1+k)\Omega - k} \dot{\epsilon}^* \quad (6)$$

ここで、除荷時の正勾配 E_u と軟化時の負勾配 E_t との弾性係数の比を $k = -E_t/E_u > 0$ のように定義している。また、式(6)は、次式のようにも書き改めることができる。

$$\dot{\sigma} = E^* \dot{\epsilon}^*, \quad E^* = \frac{E_t}{(1+k)\Omega - k} \quad (7-1)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E^*}{L} \cdot \dot{u} \quad (7-2)$$

このようにして定義された弾性係数 E^* は、塑性軟化領域と弾性除荷領域が混在する局所化した部材の等価な剛性値を表している。この等価弾性係数 E^* は、次のような2つの極値を持つことも、容易に判断されよう。

$$\begin{aligned} \Omega = 1 &\rightarrow E^* = E_t && \text{(全域塑性)} \\ \Omega = 0 &\rightarrow E^* = E_u && \text{(全域弾性除荷)} \end{aligned} \quad (8)$$

2.3 数値シミュレーション

次に、 Ω を $0 < \Omega < 1$ なる範囲にて仮定したパラメータとし、いくつかの数値計算を試みる。ここで、単軸圧縮応力下における、荷重状態($\Omega = 1$ の場合)の応力~ひずみ関係として、Popovics¹⁰⁾による基本式に、圧縮強度による修正項を加えてCollinsらによる提案¹¹⁾を採用した(Appendix参照)。

このような条件に基づき、塑性軟化領域の比 Ω をピーク応力以降0.4, 0.6, 0.8, 1.0と変化させた数値計算結果をFig. 3に示す。(a)は、増分重ね合わせ法によって得られた応力~ひずみ関係であり、 Ω が小さいほど等価剛性が減少し、急激に軟化していることがわかる。このことはまた、さらに小さい値を設定すると、snapback現象が惹起されることを示唆するものである。(b)は、このときの剛性比 $k(= -E_t/E_u)$ 、(c)は、等価剛性 E^* の変化を示している。ここで、塑性軟化領域比 Ω は、応力ピーク($\epsilon_t = 0.002$)以降単調に減少し、 $\epsilon_t = 0.0035$ にて $\Omega = \Omega_{mat}$ なる一定になるように仮定し、Fig. 3(d)に例示したとおりである。このようなモデル化は、コンクリートの圧縮試験などで観察されるひずみの局所化を簡易的に表現することを意図したものである。この点については、後述する3節にて説明を行っており、材料組成に着目したより詳細な検討とモデル化が不可欠であるが、本論では、 Ω が与えられたときの变形挙動と不安定現象に論点を置くものである。

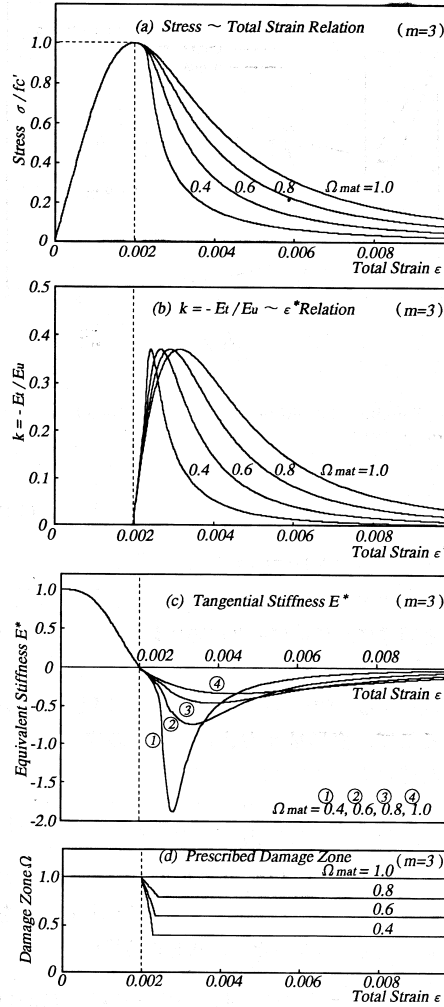


Fig. 3 Parametric Numerical Simulation of Stress σ and Average Strain ϵ^* Relation ($\Omega = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$)

3. 等価構成則の導出 (完全局所化状態)

3.1 引張軟化挙動とモデル化

今度は、引張破壊の場合のように、局所領域が完全に平面状(前例において、 $\Omega = 0$)となる、完全局所化状態を考える。

コンクリートの引張軟化曲線としては種々のモデルが提案されているが、本研究ではFig. 4に示す引張軟化曲線を用いた¹²⁾。ここで、 f_t は引張強度、 G_F は破壊エネルギー、 δ_f はひびわれ幅を示す。これは、

$$\frac{\sigma}{f_t} = (1+A) \exp\left(-\frac{B \cdot f_t}{G_F} \cdot \delta_f\right) - A \quad (9)$$

のように記述され、 $\delta_f \rightarrow \infty$ のとき、 $\sigma \rightarrow 0$ となる。なお、Fig. 4の3モデルは、いずれも

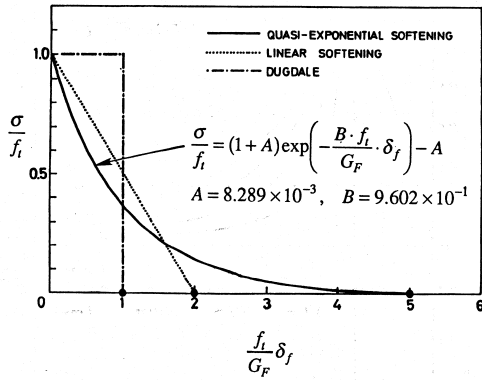


Fig. 4 Tensile Softening Curve Employed in This Study¹²⁾

$$\int_0^{\infty} \sigma(\delta_f) d\delta_f = G_F \quad (10)$$

となるように調整されている。

3.2 構成則に関する定式化

前例と同様に、荷重ピーク以降において、塑性軟化領域 (loading 状態) と弾性除荷領域 (unloading 状態) が混在する単軸一様応力場における支配方程式を考える。そこで、変形量 u および各領域の構成則を次のように記述する。

$$\text{変形の適合条件: } \dot{u} = \int_L \dot{\epsilon}(x) dx \equiv L \cdot \dot{\epsilon}_u + \delta_f \quad (11)$$

$$\text{構成関係式: } \dot{\sigma} = D_t \cdot \delta_f, \dot{\sigma}_u = E_u \cdot \dot{\epsilon}_u \quad (12)$$

ここで、単軸直列モデルであることから、 $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_t = \dot{\sigma}_u$ を用い、上記2式を整理すると、次式を得る¹³⁾。

$$\text{等価剛性: } \dot{\sigma} = \frac{D_t}{1 + \frac{D_t}{E_u}} \cdot \dot{\epsilon}_u = \frac{D_t}{1 + \frac{D_t \cdot L}{E_u}} \cdot \dot{u} \quad (13-1)$$

あるいは、等価剛性を K^* として、

$$\dot{\sigma} = K^* \cdot \dot{u}, \quad K^* = \frac{D_t}{1 + \frac{D_t \cdot L}{E_u}} \quad (13-2)$$

のようにも記述できる。

式(12)の D_t は、Fig. 4に示した引張軟化曲線の接線係数 $d\sigma/d\delta_f$ に相当するとし、次式として導くことができる。

$$D_t \equiv \frac{d\sigma}{d\delta_f} = -\frac{(1+A)B \cdot f_t^2}{G_F} \cdot \exp\left(-\frac{B \cdot f_t}{G_F} \cdot \delta_f\right) \quad (14)$$

3.3 E^* と K^* との関係

ここで、前節において導出した等価剛性 E^*/L (式(7-2)) が局所化領域 ΩL を0にすると、完全局所化状態の等価剛性 K^* と同一になるはずであり、以下にそれを示す。まず、各々の局所化領域における剛性 E_t と D_t は、その力学的定義から、

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \left(\frac{E_t}{\Omega L} \right) = D_t \quad (15)$$

によって関係づけられる。次に、準局所化状態の等価剛性 E^*/L を次のように書き換える。

$$\frac{E^*}{L} = \frac{E_t}{(1+k)\Omega - k} \cdot \frac{1}{L} = \frac{\frac{E_t}{\Omega L}}{1 + \frac{(1-\Omega)L}{E_u} \cdot \frac{E_t}{\Omega L}} \quad (16)$$

そして、上式において、 $\Omega \rightarrow 0$ としたときの極値を求めるため、式(15)を用いると、

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \left(\frac{E^*}{L} \right) = \frac{D_t}{1 + \frac{D_t \cdot L}{E_u}} = K^* \quad (17)$$

となり、これは式(13-2)にて呈示した等価剛性 K^* に他ならない。すなわち、本論で展開された準局所化状態の力学的性質は、 $\Omega \rightarrow 0$ とすることにより、完全局所化状態の場合に帰着することがわかった。(これは、定式化過程における数学的な一貫性について考察したものであるので、本文にて採用した修正 Popovics モデルと e 関数式では、各々異なる現象 (圧縮と引張) をモデル化したものであり、これらは、式(15)を満たすものではないことを付記する。)

4. 正規化座標傾斜法による増分計算と数値シミュレーション

4.1 正規化座標傾斜法

snapback 現象を含む軟化領域を安定的に計算を行うには、従来のような変位制御に変わる新しいパラメータによる増分計算が必要となる。この場合、通例、弧長法 (arch-length-method) が用いられるが、ここでは、次のような座標傾斜法 (文献9, 14) を提案する (このため、これまでの速度形から増分形に変えて記述する)。Fig. 5に示すように、これまで取り扱ってきた $\sigma \sim \epsilon^*$ 直交座標系を時計回りに θ だけ回転させ、新しい

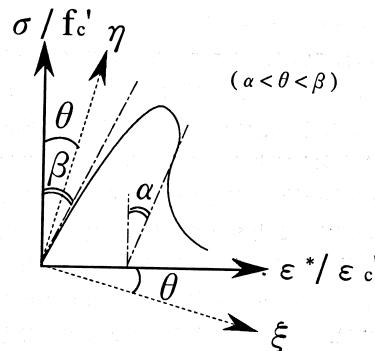


Fig. 5 Transformation from $\sigma/f_c' \sim \epsilon^*/\epsilon_c'$ Coordinate to $\xi \sim \eta$ Coordinate

直交座標 $\xi \sim \eta$ を考える。これら両座標間の関係は、よく知られるように次の変換式で与えられる (但し、回転角 θ は E^* の最急勾配 α より大きく、かつ初期接線勾配 β より小さくすることがポイントである。すなわち、 $\alpha < \theta < \beta$ が制約条件となる)。

$$\begin{cases} d\xi \\ d\eta \end{cases} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{cases} d\varepsilon^*/\varepsilon_c \\ d\sigma/f_c \end{cases} \quad (18)$$

ここで、旧座標については、ピーク応力 f_c (圧縮強度) とその時のひずみ ε_c にて正規化して考えている。また、もとの応力増分 \sim ひずみ増分の関係式、 $d\sigma = E^* \cdot d\varepsilon^*$ についても、

$$\frac{d\sigma}{f_c} = \frac{\varepsilon_c E^*}{f_c} \left(\frac{d\varepsilon^*}{\varepsilon_c} \right) \quad (19)$$

のように、正規化を施して取り扱う。よって、式 (18)、(19) から、新座標系での増分量は、

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(\cos\theta - \frac{\varepsilon_c E^*}{f_c} \sin\theta \right) \frac{d\varepsilon^*}{\varepsilon_c} \\ d\eta &= \left(\sin\theta + \frac{\varepsilon_c E^*}{f_c} \cos\theta \right) \frac{d\varepsilon^*}{\varepsilon_c} \end{aligned} \quad (20)$$

のように、ひずみ増分 $d\varepsilon^*$ によって与えられるとともに、これを消去することにより、次式を得る。

$$d\eta = C_{\xi\eta} \cdot d\xi, \quad C_{\xi\eta} = \frac{\sin\theta + \frac{\varepsilon_c E^*}{f_c} \cos\theta}{\cos\theta - \frac{\varepsilon_c E^*}{f_c} \sin\theta} \quad (21)$$

以上が新座標系における増分関係式となる。これらを整理すると最終的に次式を導出することができる。

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon^*}{\varepsilon_c} &= (\cos\theta + C_{\xi\eta} \sin\theta) d\xi \\ \frac{d\sigma}{f_c} &= (-\sin\theta + C_{\xi\eta} \cos\theta) d\xi \end{aligned} \quad (22)$$

すなわち、これまでの平均ひずみ ε^* に変わって、 ξ が新しい制御パラメータとなる。このことにより、適当な増分値 $d\xi$ を付与することにより、硬化 \rightarrow 軟化 \rightarrow snapback \rightarrow 軟化を含めた一連の増分解析が、連続的かつ安定的に可能となる。このような考え方は、小柳・六郷らの提案²⁾に基づくもので、ここでは、正規化座標傾斜法と呼ぶことにする。

以上までの展開は、準局所化状態を対象としたものであるが、ここで、完全局所化状態の場合を考える。そこで、式 (18) の代わりに、

$$\begin{cases} d\xi \\ d\eta \end{cases} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{cases} du/u_0 \\ d\sigma/f_t \end{cases} \quad (23)$$

から出発する。ただし、旧座標系については、縦軸はピーク応力 f_t で、横軸は破壊エネルギーが等値になる線形直線が横軸と交わる点 u_0 にて正規化して考えている。また、式 (13-1) についても以下のように正規化を

施す。

$$\frac{d\sigma}{f_t} = \frac{K^* \cdot u_0}{f_t} \cdot \frac{du}{u_0}, \quad K^* = \frac{D_t}{1 + \frac{D_t \cdot L}{E_u}} \quad (24)$$

式 (23)、(24) より、新座標系での増分量は変位増分 du によって次式のように与えられる。

$$d\xi = \left(\cos\theta - \frac{K^* \cdot u_0}{f_t} \sin\theta \right) \frac{du}{u_0} \quad (25-1)$$

$$d\eta = \left(\sin\theta + \frac{K^* \cdot u_0}{f_t} \cos\theta \right) \frac{du}{u_0} \quad (25-2)$$

さらに、上式の du を消去すると次式が得られる。

$$d\eta = C_{\xi\eta} \cdot d\xi, \quad C_{\xi\eta} = \frac{\sin\theta + \frac{K^* \cdot u_0}{f_t} \cos\theta}{\cos\theta - \frac{K^* \cdot u_0}{f_t} \sin\theta} \quad (26)$$

式 (26) が新しい座標軸での増分計算法であり、これまでの変位 u に代わって ξ が制御パラメータとなり、準局所化状態における式 (21) に対応している。

4.2 数値シミュレーションと実験結果との比較

以上のような正規化座標傾斜法を用いて、いくつかの数値シミュレーションおよび実験結果との照合を試みる。本提案手法を実際のコンクリートに適用するためには、まずその材料特性に応じた軟化領域 Ω を合理的に評価しなければならないが、本文では次式のようなモデル化を仮定した。

$$\Omega = 1 - (1 - \Omega_{\text{mat}}) \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{\varepsilon_{\text{mat}} - \varepsilon_c} \right)^\beta \geq \Omega_{\text{mat}} \quad (27)$$

ここで、 Ω_{mat} は材料ごとに定まる局所化領域の最小値、 ε_{mat} はこれに至るときのひずみを示し、 β は局所化の進行速度を表している。すなわち、式 (27) は、ピーク強度時 ($\varepsilon = \varepsilon_c$) にて、ひずみの局所化 (分岐) が開始し、 Ω は徐々に減少するが、 Ω_{mat} は下回らないことを表現したものである (図-3 (d) 参照)。これは、現象論的なモデル化であるが、準局所化状態の力学的挙動^{5), 6)}を大略模擬するものと考えよう。

Fig. 6 は、定数 $m=3$ 、 $\varepsilon_{\text{mat}}=0.0025$ と仮定して、 Ω_{mat} を $=0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ の 6 通りに変化させ、軟化から snapback に至る一連の計算結果を比較したものである。

Fig. 7 は、定数 $m=3$ 、局所化領域の最小値を $\Omega_{\text{mat}}=0.1$ と仮定し、この Ω_{mat} に至るときのひずみ ε_{mat} を $0.0025 \sim 0.0035$ に変化させて行った数値シミュレーション結果である (図中の点線部分は、ピーク強度以降に等価剛性 E^* が正となるところで、snapback 状態であることを示している)。同図より、局所化の到達時のひずみを表す ε_{mat} に大きな影響を受けていることがわかる。

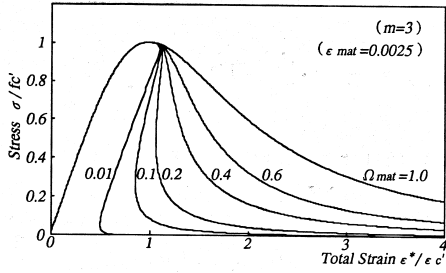


Fig. 6 Numerical Simulation for $\sigma/f_c' \sim \epsilon^*/\epsilon_c'$ Relations ; from Softening to Snapback ($\Omega_{mat}=0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 1.0$)

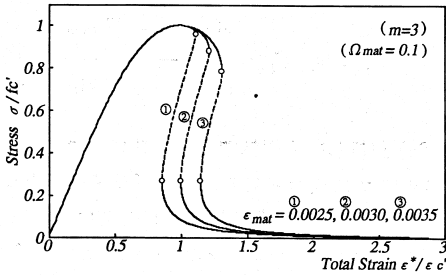


Fig. 7 Numerical Demonstration for Snapback Behavior based on Various ϵ_{mat}

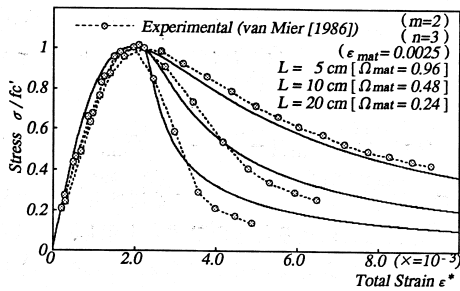


Fig. 8 Comparison with Experimental Results (Van Mier [1986])

Fig. 8 は、van Mier による角柱供試体を用いた単軸圧縮試験結果³⁾と比較したものである。これは、供試体の高さを変化させ、供試体の寸法効果を実験的に検討したものである。本手法の適用に際しては、局所化領域の最小値を、

$$\Omega_{mat} = nG_{max}/L \quad (n: \text{正の定数}) \quad (28)$$

のように考えた。 G_{max} は骨材の最大寸法を表し、定数 n については $n=3$ を仮定しており、これは、骨材最大寸法の 3 倍を局所化領域の幅 $\Omega_{mat} \cdot L$ とするものである。引用実験での骨材の最大寸法 G_{max} は 16 mm であり、定数 $m=2$, $\epsilon_{mat}=0.0025$ とした。このような仮定のもと、計算結果は実験値とよく合致し、少なくとも供試体長さ L の違いによる寸法効果を明瞭に表現していると言える。

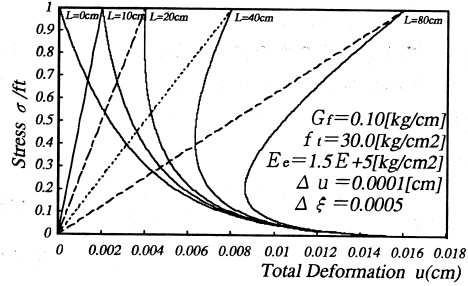


Fig. 9 Numerical Calculation of Concrete in Perfect Localization : ($L=0, 10, 20, 40, 80$ cm)

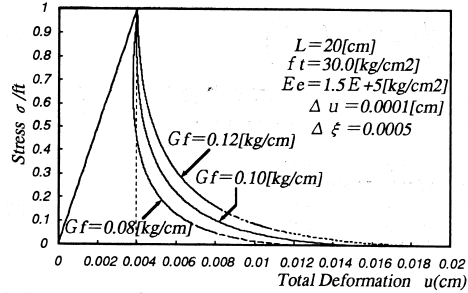


Fig. 10 Numerical Calculation of Concrete in Perfect Localization : ($G_F=0.08, 0.1, 0.12$ kgf/cm)

次に、完全局所状態についての数値計算を Fig. 9 に示す。これは、部材寸法を $L=0 \sim 80$ cm まで変化させたときの荷重引張応力 σ と変位 u との関係を示したものである ($L=0$ の場合は、弾性域がなく、 $\sigma \sim \delta_f$ 関係そのものを表している)。この場合、 L の増大とともに急激な応力低下となり、大略 $L=20$ cm 以上の場合、snapback を呈することがわかった (もちろん、これは Fig. 9 の図中に示した計算条件の場合のみ成立する)。Fig. 10 は破壊エネルギー G_F をパラメータとしたときの $\sigma \sim u$ 関係であり、 G_F が小さくなる程より急激な応力低下となることがわかる。

Fig. 11 は、材料は同じであるが、部材全体長さが異なる a, b, c の 3 種類について、応力 σ と部材端部の変位 $u (= \epsilon \cdot L)$ との関係を表したものである。(a) は、準局所化状態にある圧縮応力下のコンクリートを示したものであり、局所化領域 $\Omega_{mat} L$ の長さが同じで、部材長さ L の比が 1 : 2 : 4 としたものである。(b) は、完全局所状態にある引張コンクリートの挙動を計算したもので、部材寸法以外は全て同一条件となっている。同図より、圧縮強度に至るまで 3 曲線は寸法比の変形量を示すが、ピーク応力以降は、全く異なる降下曲線を呈することがわかる。特に、c のように部材に占める局所化領域の割合 (すなわち Ω) が小さい場合 (図-(a)), あるいは、部材長さそのものが大となる場合 (図-(b)), ピーク応力以降 snapback が励起され、不安定状態になる

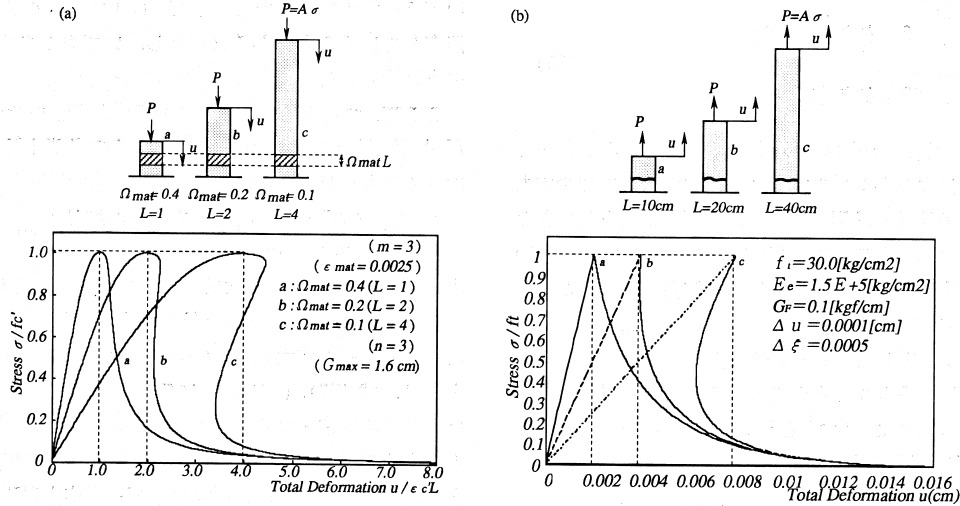


Fig. 11 Relation between Applied Stress and Total Deformation for Different Sizes (a) in Compression, and (b) in Tension

ことがわかる。

5. 単軸圧縮部材の安定/不安定条件

5.1 基本条件の導出

ピーク応力以降における圧縮部材の安定/不安定条件を解析的に導出するため、3次元場におけるポテンシャルエネルギーの第2変分を考える。そこで、まず平衡状態にある部材の全ポテンシャルエネルギー Π を提示するが、これは、内部エネルギー U と外部エネルギー V_E の和として、一般的に次式のように表される (例えば、文献15), 16)。

$$\Pi = U + V_E \quad (29)$$

ここで、各エネルギーは、次のように定義される。

$$\begin{aligned} U &= \int_V \int_{\epsilon_{ij}^*} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^* dV \\ &= \int_{\Omega V} \int_{\epsilon_{ij}^*} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^* dV + \int_{(1-\Omega)V} \int_{\epsilon_{ij}^*} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^* dV \quad (30) \\ V_E &= -Pu \end{aligned}$$

上式を本論のような単軸圧縮問題に帰着させると、部材の体積を $V=LA$ (A : 部材の断面積) として、次式を得る。

$$\Pi = LA \left(\Omega \int_0^{\epsilon_t} \sigma d\epsilon_t + (1-\Omega) \int_0^{\epsilon_u} \sigma d\epsilon_u \right) - Pu \quad (31)$$

これは、部材内部のひずみ成分 ϵ_t と ϵ_u による2自由度問題と見なすことができる。通例、自由度として変位成分が用いられるが、ここでは、 $\epsilon_t = \delta_t / \Omega L$, $\epsilon_u = \delta_u / (1-\Omega)L$ より、ひずみと変位は等価であると考え (ここで、 δ_t は局所化域の変形、 δ_u は非局所化域の変形を示す)。

従って、ポテンシャルエネルギーの変化 $\Delta \Pi$ は、両ひ

ずみに対する変分 $\delta \epsilon_t$ と $\delta \epsilon_u$ を用い、 $\Delta \Pi = \Pi(\epsilon_t + \delta \epsilon_t, \epsilon_u + \delta \epsilon_u) - \Pi(\epsilon_t, \epsilon_u)$ のように定義する。よって、 $\Delta \Pi$ は、テイラー展開を用いて、次式のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi(\delta \epsilon_t, \delta \epsilon_u) &= \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \dots \\ &= \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_t} \delta \epsilon_t + \frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_u} \delta \epsilon_u \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon_t^2} (\delta \epsilon_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon_t \partial \epsilon_u} (\delta \epsilon_t \delta \epsilon_u) + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon_u^2} (\delta \epsilon_u)^2 \right] \\ &\quad + \dots \quad (32) \end{aligned}$$

ここで、ポテンシャルエネルギーの第1変分は、平衡状態において零であるので、上式の符号は、第2変分により決定される。そこで、式(32)の右辺第2項のみを整理すると次式のように書き表せる。

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon_t^2} (\delta \epsilon_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon_t \partial \epsilon_u} (\delta \epsilon_t \delta \epsilon_u) + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon_u^2} (\delta \epsilon_u)^2 \\ &= \int_{\Omega V} E_t (\delta \epsilon_t)^2 dV + \int_{(1-\Omega)V} E_u (\delta \epsilon_u)^2 dV \quad (33) \end{aligned}$$

ここで、上式を体積 LA で正規化するとともに、各領域でのひずみが一定であるとした仮定を再度用いると、次式が得られる。

$$\frac{\delta^2 \Pi}{LA} = \Omega E_t (\delta \epsilon_t)^2 + (1-\Omega) E_u (\delta \epsilon_u)^2 \quad (34)$$

ところで、すべての可能な変分 $\delta \epsilon_t$ と $\delta \epsilon_u$ に対して、 $\delta^2 \Pi / LA$ が正を得たとき、部材は安定であり、いずれかの $\delta \epsilon_t$ と $\delta \epsilon_u$ に対して $\delta^2 \Pi / LA$ が負の時、不安定となる。すなわち、安定/不安定条件を次のように表すことができる。

$$\frac{\delta^2 \Pi}{LA} > 0 \rightarrow \text{安定} (\Delta \Pi > 0)$$

$$\frac{\delta^2 \Pi}{LA} < 0 \rightarrow \text{安定} (\Delta \Pi < 0) \quad (35)$$

以上の展開は、Treffitz の条件として解釈することができ、これは保存系部材の安定評価に関する古典理論である。この条件は、通例、線形弾性問題に多用されてきたが、弾性係数として $E = \partial \sigma / \partial \epsilon$ のごとく接線係数を用いることにより、直ちに非弾性材料に拡張することができる(文献4, 17, 18))。

また、式(30)~(34)までの展開は、2相系材料に対する取扱いとみなすことができ、これを単一材料に置き換えると(例えば、 $\Omega = 1$ として式(33)右辺を書き換えると)、安定条件として

$$\int_V E_t (\delta \epsilon_t)^2 dV = \int_V \delta \sigma \delta \epsilon_t dV > 0 \quad (36)$$

を得ることができる。これは、Drucker の安定仮説におけるいわゆる第一条件(stability in the small)¹⁹⁾の単軸問題に相当することがわかる。すなわち、本論での安定条件式は、 $\Omega = 1$ または $\Omega = 0$ の場合に限定することにより、Drucker の安定条件に帰着することを示唆している。

5.2 安定問題に関する計算例と図化

Fig. 12 は第2変分 $\delta^2 \Pi$ を両ひずみに対する変分 $\delta \epsilon_t$ と $\delta \epsilon_u$ の2自由度問題としてみた $\delta^2 \Pi / LA$ の、(a) ピーク応力前と (b) ピーク応力後の変化を示したものである。同図から、(a) においては、すべての領域にお

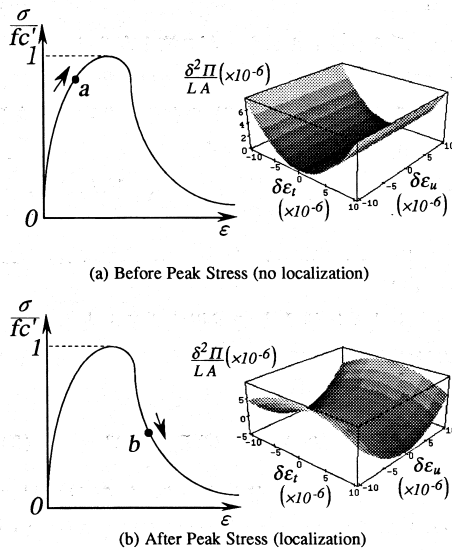


Fig. 12 The Characteristic Surfaces of Second Variation of Potential Energy Applied to Stability Conditions

いて $\delta^2 \Pi > 0$ であるのに対して、(b) では、正負領域が混在しているのがわかる(ただし、いずれかの変分が0の点は除外される)。

ここで、独立変数である2成分 $\delta \epsilon_t$ と $\delta \epsilon_u$ を持つ $\delta^2 \Pi / LA$ が、すべての場合正であるための必要十分条件は次式で与えられる¹⁶⁾。

$$\Theta = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon_t^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon_u^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon_t \partial \epsilon_u} \right) \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon_t \partial \epsilon_u} \right) > 0 \quad (37)$$

上式は、式(31)により次式のように書き換えられる。

$$\Theta = (1 - \Omega) \Omega E_t E_u = -(1 - \Omega) \Omega k (E_u)^2 \quad (38)$$

ここで、ピーク応力以降、 E_t は負(もしくは、 k は正)となり、式(37)、(38)は常に負となるので、その部材は直ちに不安定となる。これは、二つの異なるひずみ $\delta \epsilon_t$ と $\delta \epsilon_u$ が独立に変化できるので、応力制御に相当すると考えることができ、この場合、ピーク応力以降は常に不安定となることを示唆している(Fig. 12 (b))。

一方、変位制御の場合、式(34)は次のような1自由度問題に変換される。まず、部材端部の変位 u を $\delta u = 0$ のように変位制御すると、

$$\delta u = \int_{\Omega V} \delta \epsilon_t dx + \int_{(1-\Omega)L} \delta \epsilon_u dx = 0 \quad (39)$$

となり、これを整理すると次式の制約関係を導くことができる。

$$\delta \epsilon_u = -\frac{\Omega}{1-\Omega} \delta \epsilon_t \quad \delta \epsilon_t = -\frac{1-\Omega}{\Omega} \delta \epsilon_u \quad (40)$$

式(40)を式(34)に代入すると、最終的に次式を定式化することができる。

$$\frac{\delta^2 \Pi}{LA} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\Omega)\{(1+k)\Omega-k\}}{\Omega} E_u (\delta \epsilon_u)^2 \\ -\frac{\Omega\{(1+k)\Omega-k\}}{k(1-\Omega)} E_t (\delta \epsilon_t)^2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

従って、 $0 < \Omega < 1$ であることを勘案すると、 $\delta^2 \Pi$ の符号から、安定/不安定条件を次式のように表すことができる。

$$\Omega > \frac{k}{1+k} \rightarrow \text{安定} (\delta^2 \Pi > 0)$$

$$\Omega < \frac{k}{1+k} \rightarrow \text{不安定} (\delta^2 \Pi < 0) \quad (42)$$

以上の2式が変位制御における安定/不安定条件であり、これをFig. 13およびFig. 14のように模式化するとわかりやすい。これは、(a)としてsnapbackを生じる時の応力~ひずみ関係を表し、また、(b)はその時の Ω と $k/(k+1)$ とがどのような関係にあるかを、横軸を軟化ひずみ ϵ_t に換えて示したものである。式(42)の安定条件は、既にRunessonら²⁰⁾が提示しており(ただし、その導出根拠は同文献中からは明かでない)、本文はこれをエネルギー原理に基づいた一般的な手法で導出したも

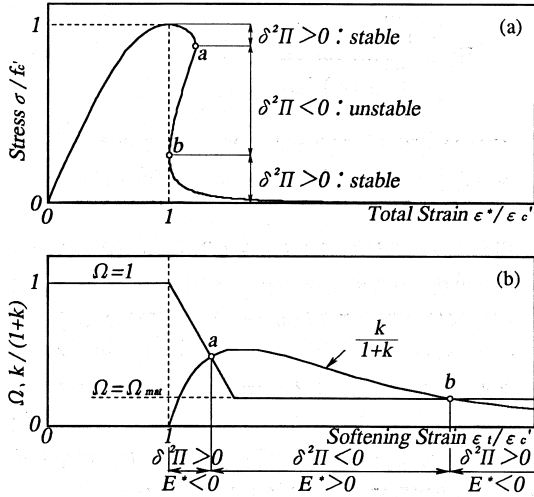


Fig. 13 (a) Equilibrium Path of a Member in Semi-Localization with Snapback (b) Identification of Stable/Unstable Condition of a Member under Displacement Control

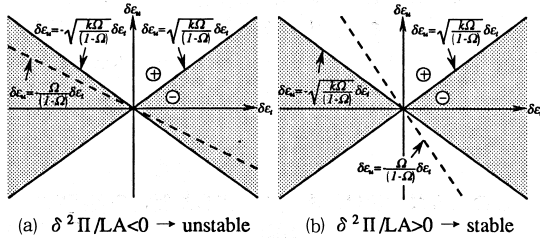


Fig. 14 Schematic Description of Stability/Instability Condition on $\delta\varepsilon_t \sim \delta\varepsilon_u$ Plane

のである。

ここで、前出の Fig. 12 (b) に戻って、 $\delta^2\Pi=0$ なる条件から、同図中の安定/不安定の境界条件を求めることができる。すなわち、

$$\delta\varepsilon_u = \pm \sqrt{\frac{k\Omega}{1-\Omega}} \cdot \delta\varepsilon_t \quad (43)$$

これを、変位制御における制約条件式 (40) とを併記すると Fig. 14 が得られる。

ところで、式 (42) で与えられる条件は、式 (7-1) における等価弾性係数 E^* の符号と照合すると、 $E^* < 0 \rightarrow$ 安定、 $E^* = 0 \rightarrow$ 中立、 $E^* > 0 \rightarrow$ 不安定という結果になることがわかる。このことはまた、軟化 \rightarrow 安定、snapback \rightarrow 不安定という帰結を意味するもので、実験的な認識 (例えば文献 3)) と合致するものである。

6. 単軸引張部材の安定/不安定条件

6.1 基本条件の導出

次に、完全局所化状態にある引張部材の安定/不安定条件を考える。この場合、前例と同様の展開で記述する

ことができ、式 (29) から出発する。式 (30) を完全局所化状態に適用し、単軸問題に帰着させると、内部エネルギー U を次のように記述できる。

$$U = \int_L \int_{\varepsilon_u} \sigma \cdot \delta\varepsilon_u dx + \int_{A_s} \int_{\delta_f} \sigma \cdot d\delta_f dA \quad (44)$$

ここで、式 (33) のように第 2 変分 $\delta^2\Pi$ をとると、

$$\begin{aligned} \delta^2\Pi &= \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varepsilon_u^2} (\delta\varepsilon_u)^2 + \frac{\partial^2\Pi}{\partial\delta_f^2} (\delta\delta_f)^2 \\ &= LA \cdot E_u (\delta\varepsilon_u)^2 + A \cdot D_t (\delta\delta_f)^2 \end{aligned} \quad (45)$$

ようになる。荷重制御の場合、前例と同様、軟化開始時点で不安定となることは明らかであり、一方、変位制御について考えると、次式の制約条件を課す必要がある。

$$\delta u = \int_L \delta\varepsilon_u \cdot dx + \delta_f = 0 \quad (46)$$

このことから、式 (45) は次のように書き改められる。

$$\delta^2\Pi = (LA \cdot E_u + L^2 A \cdot D_t) (\delta\varepsilon_u)^2 \quad (47)$$

従って、 $\delta^2\Pi$ の符号から安定/不安定条件を次のように表現することができる。

$$D_t + \frac{E_u}{L} > 0 \rightarrow \text{安定} \quad (\delta^2\Pi > 0) \quad (48-1)$$

$$D_t + \frac{E_u}{L} < 0 \rightarrow \text{不安定} \quad (\delta^2\Pi < 0) \quad (48-2)$$

ここで、式 (48) で与えられる条件は、式 (13-2) における等価剛性 K^* の符号によっても説明することができる。すなわち、 $K^* < 0 \rightarrow$ 安定、 $K^* > 0 \rightarrow$ 不安定という結果になる。このことはまた、軟化 \rightarrow 安定、snapback \rightarrow 不安定という帰結を意味するもので、準局所化状態と同じ結論が得られた。さらに、式 (9) で記述される軟化曲線は、ピーク直後 ($\delta_f = 0$) が最急勾配となり、コンクリートの実挙動もそのような場合が多い。そこで、最も critical な場合として、 $D_t (\delta_f = 0)$ を式 (48-2) に代入し、整理すると、不安定条件として下式を得る。

$$\frac{(1+A)B \cdot f_t^2 L}{G_F E_u} = \frac{0.968 f_t^2 L}{G_F E_u} > 1 \quad (49)$$

ここで、破壊力学における定数である、

$$\text{特性長さ } l_{ch} = \frac{E_u \cdot G_F}{f_t^2} \quad (50)$$

$$\text{脆さ数 } B = \frac{L}{l_{ch}} \quad (51)$$

を導入し、式 (49) を書き換えると、次式を得る。

$$0.968 \frac{L}{l_{ch}} = 0.968 B > 1 \quad (52)$$

以上の解析結果から、不安定条件として次のようなことが言える。部材が長い程、破壊エネルギーが小さい程、除荷剛性が小さい程、不安定状態になりやすく、snapback に突入する。また、部材長さ L が概ね特性長さ

l_{ch} と等しいか大きいとき、脆さ数 B が 1 を越えると不安定状態となる。

7. 不安定エネルギーの定量化に関する提案

最後に、安定条件を満たさない部材の不安定性を考察し、その定量的評価を試みる。Fig. 15 は、不安定経路を持つ単軸圧縮部材の変位経路を模式的に描いたものである。このような snapback を生じる部材を変位制御すると、ピーク以降①～②までは安定的に推移するが、点②からは直ちに点③に飛躍する（これは snapthrough と呼ばれる）。このとき経路 Q は鈎合状態ではなく、図中の横線部分は運動エネルギーとして変換される（例えば、文献 2), 21)）。そして、この面積が大きくなるほどその不安定性が大きくなると判断できる。そこで、このような鈎合不安定経路 P と snapthrough 経路 Q とで囲まれる面積に注目し、これを不安定エネルギーとして定義する²²⁾。すなわち、

$$W_k = \int_V \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} \varepsilon^*(\sigma_c) d\sigma_c dV \quad (53)$$

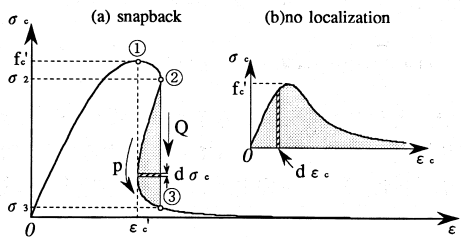


Fig. 15 Definition of Unstable Energy for a Compression member in Phenomenon of Snapback

$$\bar{W}_k = \frac{\int_{\sigma_2}^{\sigma_3} \varepsilon^*(\sigma_c) d\sigma_c}{\int_0^{\infty} \sigma_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c} \quad (54)$$

式 (54) は、不平衡運動エネルギーを、局所化を生じないときの安定的に消費されるエネルギーで正規化したものである。

Fig. 16 は、3 個のパラメータ (Ω , ε_{mat} , L) を変化した時の数値計算結果で、同図の縦軸は圧縮荷重 $P = \sigma A$ (kgf), 横軸は荷重点変位 u (cm) にて示した。また、図中の横線は対象となる積分面積を表すもので、不安定エネルギーの数値を併記した。図から判断されるように、 Ω が小さいほど、 L が大きいほど、 ε_{mat} が ε_c に近いほど、不安定運動エネルギー W_k が大きくなり、設定したパラメータに影響を受けることがわかった。

また、Fig. 17 は、コンクリート強度 f_c に注目して、不安定エネルギー W_k を整理するとともに、部材長さ L と式 (28) で与えられる局所化領域の最小値 Ω_{mat} との関係併記したものである。

以上をまとめると、本提案モデルは、局所化領域が小さい程、部材寸法が大きい程、コンクリート強度が大きい程、局所化が急速に進行する程、不安定の度合いが大きくなることを示唆し、これまでの実験結果を少なくとも定性的には満足するものであると言える。

このような結論は、本論で設定した仮定の範囲内で成立するものであるが、より一般化することにより、圧縮破壊する構造部材（例えば、鉄筋コンクリート柱や耐震壁など）の安定性評価（例えば、文献 23)）につながるものが期待でき、今後の課題としたい。

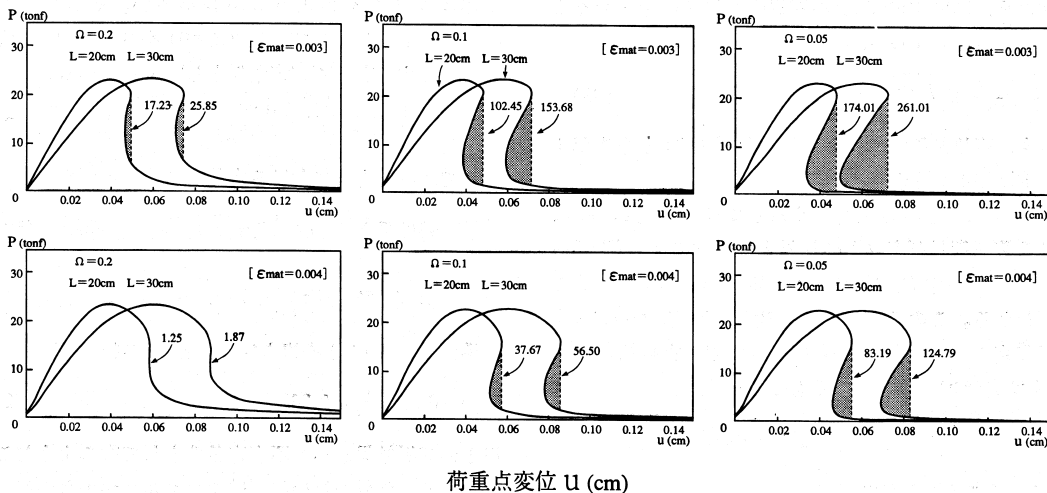


Fig. 16 Parametric Study for Unstable Behavior of Concrete in Compression showing Snapdown Path (Numbers in Figures Indicate Unstable Kinetic Energy in kgf·cm)

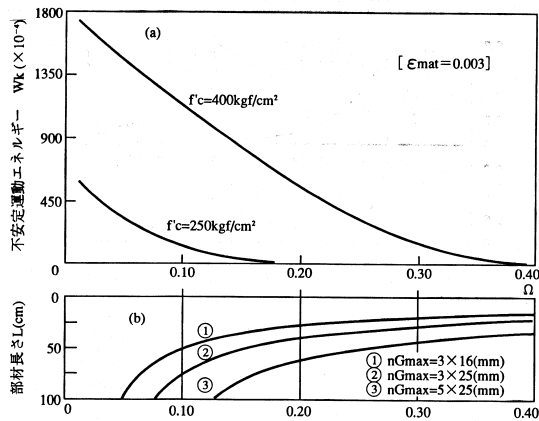


Fig. 17 (a) Relationship between Unstable Kinetic Energy and Fraction of Localized Zone (b) Relationship between Length of Members and Minimum Fraction of Localized Zone

8. 結 論

本論文の成果および要約として、次のような結論を示す。

(1) 本文は、まず、有限なひずみの局所化領域をもつ場合を準局所化状態、局所化領域が完全に面状となった場合を完全局所化状態と定義・分類した。これらは、コンクリートの圧縮荷重下および引張荷重下の場合に相当する。これらは、いずれも塑性-弾性分岐⁹⁾を対象とするもので、準脆性材料の典型的な局所化状態であると判断される。

(2) 準局所化状態に対する等価弾性係数 E^* および完全局所化状態の等価剛性 K^* を次のように定式化した。

$$E^* = \frac{E_t}{(1+k)\Omega - k}, \quad K^* = \frac{D_t}{1 + \frac{D_t \cdot L}{E_u}}$$

$$\text{ただし、} \lim_{\Omega \rightarrow 0} \left(\frac{E^*}{L} \right) = K^*$$

さらに、増分計算に際して、正規化座標傾斜法を用いることにより、硬化、軟化、snapback を含む部材の安定的な変形解析が可能となった。さらには、応力ピーク以降の変形に関する寸法効果についても表すことができた。

(3) 準局所化状態における局所化の進行を表すものとして式 (27), (28) のような表現を用いることにより、限られた数ではあるが、既往の実験結果を大略満足することができた。ただし、このようなモデル化は、簡易的な表現にとどまるもので、本質的には、材料組成の破壊性状やマイクロメカニクスに基づいたより精緻な検討が必要であり、例えば、非局所理論 (文献 24)) がそ

の一つとして考えられる。

(4) ひずみの局所化領域を含む単軸圧縮部材の安定/不安定条件を、非弾性問題に対するエネルギー原理 (Trefftz の条件) により定式化した。これは、例えば不安定条件として、

準局所化状態の場合、

$$\text{応力制御 } (\delta\sigma=0) \rightarrow E_t < 0$$

$$\text{変位制御 } (\delta u=0) \rightarrow \Omega < \frac{k}{1+k} = \frac{-E_t}{E_u - E_t}$$

完全局所化状態の場合、

$$\text{応力制御 } (\delta\sigma=0) \rightarrow D_t < 0$$

$$\text{変位制御 } (\delta u=0) \rightarrow D_t + \frac{E_u}{L} < 0$$

$$\left(\text{脆さ数で表した場合} \rightarrow B = \frac{L}{l_{ch}} > 1.03 \right)$$

のように表すことができる。これは、応力制御の場合には応力ピーク以降に、変位制御の場合には snapback 開始以降に不安定現象が誘発されることを意味し、これまでの物理的・実験的な認識と正しく符号するものである。このような帰結は、半ば認知された知見 (例えば、文献 25)) ではあるが、初等的エネルギー原理の適用により、一貫した論理展開が整備されたと確信する。

(5) さらに、snapdown する圧縮部材 (変位制御下) の不安定性の程度を定量的に表現するための不安定運動エネルギー W_k を、snapback する不安定釣合い経路と snapthrough する不平衡経路で囲まれる面積によって定義した。そして、不安定エネルギー W_k を試算したところ、 Ω_{mat} が小さいほど、材料強度が大なるほど、部材長さ L が大きいほど、 ϵ_{mat} が小さいほど、 W_k は大きくなり、これらは従来の不安定挙動に関する定性的な挙動を満足するものである。ただし、定量的な評価の確認、実験結果 (実験的に測定できるか不明である) との照合など、さらに検討が必要である。

(6) 本論は、荷重方向と不連続面が直交すること、局所化の開始時期とその領域の長さが自動的に与えられるなど、ひずみの局所化に関する最も単純化した単軸問題について述べたものである。このように凝縮された部材のモデル化により、必要な解析解の導出や数値シミュレーションとその図化が容易になるとともに、ひずみの局所化に対するより深い理解を助長するものであったと考えている。

今後は不連続面の発生時期とその方向^{26), 27)}ならびに不連続帯の幅 (例えば、引張場におけるコンクリートでは文献 28), 土質材料で言えば文献 7)) についての考察、さらには有限要素解析への応用、構造部材の安定評価²³⁾が、本論の展開として重要である。

Appendix

本論で採用した単軸圧縮応力下のコンクリート構成則は、Popovics¹⁰⁾によって提案された基本式に、Collinsら¹¹⁾による圧縮強度の修正項を加えたもので、次のように整理できる。

$$\frac{\sigma}{f'_c} = \frac{m}{m-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^{mh}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c} \quad (1)$$

ただし、 $\varepsilon/\varepsilon'_c \leq 1$ (応力ピーク時まで) $\rightarrow h=1$

$\varepsilon/\varepsilon'_c > 1$ (応力ピーク以降) $\rightarrow h=0.67 + \frac{f'_c}{62}$

$$m = 0.8 + \frac{f'_c}{17}$$

$$\varepsilon'_c = \frac{f'_c}{E_c} \frac{m}{m-1}$$

$$E_c = 3320\sqrt{f'_c} + 6900$$

(E_c と f'_c の単位は、MPa)

上式で、 h の導入と m に対する実験式 (いずれも圧縮強度の関数) が Collins らによる修正提案である。

ここで、初期係数 (弾性係数) E_e 、割線係数 E_{ep}^s および接線係数 E_{ep}^t を、

$$E_e \equiv \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \equiv \left. \frac{\sigma}{\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (2)$$

$$E_{ep}^s \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad E_{ep}^t \equiv \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

のように定義すると、これらは次のように表すことができる。

$$E_e = \frac{m}{m-1} \frac{f'_c}{\varepsilon'_c} \quad (3)$$

$$E_{ep}^s = \psi E_e, \quad \psi = \frac{m-1}{m-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^{mh}} \quad (4)$$

$$E_{ep}^t = \phi E_e$$

$$\phi = \frac{(m-1) \left[\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^{mh} - 1 - m \left\{ h \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^{mh} - 1 \right\} \right]}{\left\{ m-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^{mh} \right\}^2} \quad (5)$$

このような非線形曲線の特徴は、無次元係数 ϕ と ψ に支配され、これらは、

$$\psi = \psi(\varepsilon/\varepsilon'_c), \quad \phi = \phi(\varepsilon/\varepsilon'_c)$$

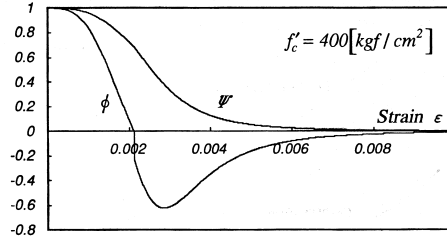
のようにみなすことができる。

これら両係数は、付図-1のような単調減少関数となり、次式のような性質を持つ。

割線係数の場合：

$$\psi(0)=1, \quad \psi(1)=\frac{m-1}{m}, \quad \psi(\infty)=0 \quad (6)$$

すべての $\varepsilon/\varepsilon'_c$ に対して、 $0 < \psi \leq 1$



付図-1 修正 Popovics 曲線の弾性係数に関する無次元係数 ψ, ϕ

接線係数の場合：

$$\phi(0)=1, \quad \phi(1)=0, \quad \phi(\infty)=0$$

$$\text{ピーク前 } \frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c} \leq 1 \rightarrow 0 \leq \phi \leq 1 \quad \text{正勾配} \quad (7)$$

$$\text{ピーク後 } \frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c} > 1 \rightarrow \phi < 0 \quad \text{負勾配}$$

なお、Collins による修正項を考慮しない場合 (常に $h=1$)、接線係数 E_{ep}^t は、

$$E_{ep}^t = - \left\{ \frac{m-1}{m-1 + (\varepsilon/\varepsilon'_c)^m} \right\}^2 \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^m - 1 \right\} E_e = \phi E_e \quad (8)$$

ただし、 $\phi = -\psi^2 \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^m - 1 \right\}$

のようになり Popovics のオリジナル版にもどる (ただし、上記のような記述方法は著者による提案である)。

さらに、このような非線形特性を、弾塑性問題とみなし、塑性係数 H_p を導入すると、接線係数 E_{ep}^t を、

$$\frac{1}{E_{ep}^t} = \frac{1}{E_e} + \frac{1}{H_p} \quad (9)$$

のように分解することができる。従って、塑性係数は、

$$H_p = \frac{\phi}{1-\phi} E_e \quad (10)$$

のように記述することができ、弾塑性解析に活用することができる。

参考文献

- 1) Mazars, J. and Bazant, Z. P. : Cracking and Damage-Strain Localization and Size Effect-, Elsevier Applied Science, 1988
- 2) 小柳 洽・六郷恵哲・大野定俊 : コンクリート供試体の下降域を含む荷重-変位曲線の自動計測システム, 土木学会論文集, 第 345 号/V-2. pp. 119-126. 1985
- 3) van Mier, J. G. M. : Multiaxial Strain-Softening of Concrete, Part I : Fracture, Part II : Load Histories, Materials and Structures, RILEM, Vol. 19, No. 111, pp. 179-200, 1986
- 4) Bazant, Z. P. : Stability of Structures, -Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theory-, Oxford University Press, 1991
- 5) 村上雅英・大谷恭弘・西野和弥・石田健吾 : 低側圧 3 軸圧縮応力下で生じたせん断帯の損傷機構モデル, コンク

- リート工学年次論文報告集, Vol. 16, No. 2, pp. 141-146, 1994
- 6) 畑中重光・水野英二・小池狭千朗: 圧縮下のコンクリートの破壊性状とそのモデル化について, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 16, No. 2, pp. 147-152, 1994
 - 7) Lade, P. V. : Localization Effects in Triaxial Tests on Sand, IUTUM Conference on Deformation and of Granular Materials, Delft, pp. 461-468, 1982
 - 8) Yoshikawa, H. and Willam, K. : Analysis of Localized Failure in Elastoplastic Solids, IUTAM Symposium, 1995 (to be Published)
 - 9) 吉川弘道・西村尚朋: 局所化したひずみを有するコンクリートの構成則と安定条件, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 14, No. 2, pp. 903-908, 1992
 - 10) Popovics, S. : A Numerical Approach to the Complete Stress-Strain Curve of Concrete, Cement and Concrete Research, Vol. 3, pp. 585-599, 1973
 - 11) Collins, M. P., Mitchell, D. and MacGregor, L. G. : Structural Design Considerations for High-Strength Concrete, Concrete International, Vol. 15, No. 5, pp. 27-34, 1993
 - 12) Planas, J. and Elices M. : Nonlinear Fracture of Cohesive Materials, International Journal of Fracture 51, pp. 139-157, 1991
 - 13) 西岡真帆・服部尚道・吉川弘道: コンクリート材料のひずみの局所化に関する基礎的考察, 土木学会第48回年次講演会講演概要集第5部, V-473, pp. 972-973, 1993
 - 14) 服部尚道・吉川弘道: コンクリートのひずみの局所化と安定/不安定条件に関する解析的研究, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 15, No. 2, pp. 63-68, 1993
 - 15) Tauchert, T. R. (鷲津・岩本訳): 構造力学とエネルギー原理, ブレイン図書出版, 1979
 - 16) 川井忠彦, 藤谷義信: 座屈問題解析, 培風館, 1991
 - 17) Lubliner, J. : Plasticity Theory, Macmillan Publishing Company (New York), Collier Macmillan Publishers (London), 1990
 - 18) 富田佳宏: 数値弾塑性力学~有限要素シミュレーション-基礎と応用~, 養賢堂発行, 1990
 - 19) Chen, W. F. : Plasticity in Reinforced Concrete, McGraw-Hill Book Company, 1982
 - 20) Runesson, K., Larsson, R. and Sture, S. : Characteristics and Computational Procedure in Softening Plasticity, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 115, No. 8, pp. 1628-1646, 1989
 - 21) 文献4)のChapter 13. Damage and Localization Instability, pp. 829-952
 - 22) 鈴木健吾: ひずみの局所化における不安定エネルギーの定量的評価に関する提案, 武蔵工業大学平成5年度卒業論文
 - 23) 石川雅美, 吉川弘道: 中心圧縮力を受けるRC柱の安定/不安定を考慮した非線形モデル, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 13, No. 2, pp. 97-102, 1991
 - 24) 西岡真帆・吉川弘道: 勾配型非局所モデルによるコンクリート材料の変形解析, 第21回関東支部技術研究発表会講演概要集, pp. 506-507, 1994年3月
 - 25) 町田 進: 延性破壊力学, 日刊工業新聞社, 1984
 - 26) 吉川弘道・長野竜馬: 特性テンソルの固有値解析による分岐条件の定式化, 土木学会第49回年次学術講演会講演概要集共通セッション, CS-6, pp. 10-11, 1994
 - 27) 長野竜馬・吉川弘道・服部尚道: 非関連弾塑性体の不連続面形成に関する基礎的研究, 土木学会第49回年次学術講演会講演概要集共通セッション, CS-6, pp. 12-13, 1994
 - 28) 大塚 浩・勝部宏明: コンクリートの破壊進行領域の性状に及ぼす骨材寸法の影響, 土木学会論文集, No. 478/V-21, pp. 109-116, 1993

(原稿受理年月日: 1994年7月11日)

Deformational Behavior and Stability/Instability Condition of a Concrete Member in Semi-localization and Perfect-localization

By *Hiromichi Yoshikawa and Maho Nishioka*

Concrete Research and Technology, Vol. 6, No. 1, Jan. 1995

Synopsis The present paper deals with a uniaxial member involving strain localization, making emphasis on deformational characteristics and stability analysis. Localization phenomena are classified into the semi-localization for concrete in compression and the perfect-localization for concrete in tension. Equivalent constitutive equations are formulated for both cases. An incremental calculation method to incorporate the snapback behavior is then presented. Stability/Instability condition is analytically derived based upon second variation of total potential energy for inelastic materials. In addition, an kinetic energy to evaluate snapdown instability of a localized member is proposed.

Keywords : semi-/perfect-localization, strain localization, equivalent constitutive law, snapback/snapdown, stability/instability condition, second variation of potential energy, kinetic instable energy