

## 非関連弾塑性体の不連続面形成に関する解析的研究

## ANALYTICAL STUDY OF FORMATION OF DISCONTINUITY SURFACE IN ELASTO-PLASTIC MATERIALS

吉川弘道\*・服部尚道\*\*・長野竜馬\*\*\*

Hiromichi YOSHIKAWA, Hisamichi HATTORI and Ryuma NAGANO

\*正会員 工博 武蔵工業大学助教授 工学部土木工学科 (〒158 東京都世田谷区玉堤1丁目28番1号)

\*\*正会員 工修 東急建設株式会社 大阪支店土木部 (〒530 大阪市北区西天満5丁目14番10号)

\*\*\*学生員 修士課程 武蔵工業大学 大学院工学研究科 土木工学専攻 (〒158 東京都世田谷区玉堤1丁目28番1号)

It has been acknowledged that when quasi-brittle solids are deformed into the plastic region, the materials exhibit the strain localization. The present paper describes mathematical formulation for its localized condition utilizing the localization tensor. This representation has often been directed toward detecting the onset of strain localization as a condition of discontinuous bifurcation within the solids. We applied this condition to elasto-plastic materials based on Drucker-Prager criterion.

We also carried out the eigenanalysis of localization tensor to determine the orientation of the discontinuous surface and motion of discontinuity, i.e. the mode of localized deformation. In addition, we extended the localization condition to analyze the post-bifurcation behavior.

*non-associated flow rule, discontinuity surface, localization tensor, post bifurcation, critical plastic modulus, eigen analysis, characteristic equation*

## 1. はじめに

弾塑性材料や準脆性材料は、塑性変形過程もしくは軟化過程にひずみが局所化すること (strain localization) が古くから知られており、局所化の形成により空間的に不連続な変形モードを呈することが認められてきた<sup>1)</sup>。コンクリート系材料や粒状材料の局所破壊に加えて、砂のせん断帯 (shear band) や軟鋼のリューダース帯 (Luders band) の形成は、ひずみの局所化もしくは不連続面発生の典型的な例である。

ひずみの局所化に関する研究は、局所化の開始条件とその方向<sup>2)3)4)</sup>、安定問題<sup>5)6)</sup>、有限要素法への応用<sup>7)</sup>、実験的な検証<sup>8)9)</sup>などに大別され、非常に多くの成果が得られてきた。一方、土質地盤材料の分野でも、ひずみの局所化はせん断帯と呼ばれ、早くから認知されており、近年、解析面で大きな飛躍を遂げている<sup>10)</sup>。このような研究は、局所化現象の解明やその数学的記述など、材料科学的な興味に加えて、部材の寸法効果の解明、安定 / 不安定条件の定式化など重要な工学的意義を持つ。

本研究は、不連続面の発生条件 (発生時期と形成方向) に対する古典理論を整理することから出発し、Drucker-Prager型非関連弾塑性構成則に適用する。また、いわゆる局所化に関する特性テンソルの固有値解析を実行し、理論的枠組を整理した。これらは、いずれも局所化発生の瞬間まで有効であるが、いわゆる分岐後の変形挙動についての解析提示は、まだ試みられていない。そこ

で、最終的には、不連続面が形成された後の変形挙動の定式化についても論点を進めたいと考えている。

本論の構成は、まず、塑性流れ則に基づく非関連弾塑性構成則の記述法について、3次元場において整理するとともに、Drucker-Pragerモデルの導入を行う。次に、ひずみの局所化による不連続部の変形に関する適合条件と釣合い条件を提示するとともに、局所化に関する特性テンソルを用い、局所化の発生条件と形成方向について考察を行う。これは、材料内部の不連続帯の発生条件 (分岐条件) として、ひずみの局所化の開始時期を与えるものである。さらに、局所化に関する特性テンソルを固有値問題として考え、局所化の形成方向と相対的な運動方向、すなわち局所化の変形モードを決定するため、固有値、固有ベクトルを導出する。加えて、分岐 (局所化発生) 後における弾塑性材料の応力～ひずみ関係を表すための定式化過程を呈示する。また、本理論での展開は、微小変形でかつひずみ速度の依存性を考えないものとする。

## 2. 関連 / 非関連弾塑性構成則

## 2.1 3次元場における一般的表示

弾塑性材料に対する構成則は、3次元場において、一般に次のような速度形式 (rate form) で与えられる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1)$$

ここで、4階のテンソル  $D_{ijkl}^{ep}$  は、弾塑性接線剛性を表し、次式のように弾性成分  $E_{ijkl}^e$  と塑性成分  $E_{ijkl}^p$  によって構成される。

$$D_{ijkl}^{ep} = E_{ijkl}^e - \kappa E_{ijkl}^p \quad (2)$$

上式は、 $\kappa = 0$  のとき弾性荷重または弾性除荷、 $\kappa = 1$  とき塑性荷重であることを意味し、 $\kappa$  は塑性スイッチとして機能する。まず、弾性成分  $E_{ijkl}^e$  については、Hooke の法則によって表すことができる。例えば、弾性係数  $E$ 、ポアソン比  $\nu$  を使えば、

$$E_{ijkl}^e = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right\} \quad (3)$$

のように表される(ここで、 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  は Kronecker のデルタを表す)。

次に塑性成分  $E_{ijkl}^p$  については、非関連流れ則 (non-associated flow rule) を採用するとともに、硬化/軟化過程を表すため、塑性係数 (plastic modulus)  $H_p$  を導入し、次式のように表示する。

$$E_{ijkl}^p = \frac{E_{ijmn}^e m_{mn} n_{pq} E_{pqkl}^e}{H_p + n_{mn} E_{mnpq}^e m_{pq}} \quad (4)$$

上式において、 $m_{ij}$  は塑性ポテンシャル関数  $q$  の曲面上に対する法線ベクトル、 $n_{ij}$  は降伏曲面  $f$  に対する法線ベクトルを表し、次のように定義される。

$$m_{ij} = \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}, \quad n_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5)$$

## 2.2 2次元場における表示

3次元弾塑性性材料を平面問題として考える場合、平面応力 ( $\dot{\sigma}_{i3} = 0$ )、平面ひずみ ( $\dot{\epsilon}_{i3} = 0$ ) の2つの状態が存在し、次式で表される。

$$\dot{\sigma}_{ab} = D_{abcd}^{ep} \dot{\epsilon}_{cd}, \quad D_{abcd}^{ep} = E_{abcd}^e - \kappa E_{abcd}^p \quad (a, b, c, d = 1, 2)^* \quad (6)$$

ここで、弾性成分  $E_{abcd}^e$  については、次式のように表すことができる。ただし、以降、平面応力の式を a、平面ひずみの式を b として、式番号に付記する。

$$E_{abcd}^e = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ab} \delta_{cd} + \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \right\} \quad (7a)$$

$$E_{abcd}^e = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ab} \delta_{cd} + \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \right\} \quad (7b)$$

また、塑性成分  $E_{abcd}^p$  に関しては、次のように表すことができる。

$$E_{abcd}^p = \frac{E_{abef}^e m_{ef} n_{gh} E_{ghcd}^e}{A} \quad (8a)$$

$$E_{abcd}^p = \frac{E_{abkl}^e m_{kl} n_{mn} E_{mncd}^e}{A} \quad (8b)$$

ここで、正のパラメータ  $A$  は、次式で表される。

$$A = H_p + n_{ef} E_{efgh}^e m_{gh} > 0 \quad (9a)$$

$$A = H_p + n_{ij} E_{ijkl}^e m_{kl} > 0 \quad (9b)$$

\* 本論では、添字  $i, j, k, l, m, n, p, q$  は、1, 2, 3 まで循環し、添字  $a, b, c, d, e, f, g, h$  は、1, 2 までとする。

## 2.3 Drucker-Prager 型弾塑性構成則

さて、ここで摩擦材料もしくは静水圧依存性材料に多用される、Drucker-Prager 型の弾塑性構成則を考える。この場合、降伏関数  $f$  および塑性ポテンシャル関数  $q$  については、次のように表示される。

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (10)$$

$$q = \beta I_1 + \sqrt{J_2} - k' = 0 \quad (11)$$

ここで、 $I_1$  は応力テンソルの第1不変量、 $J_2$  は偏差応力テンソルの第2不変量を示し、 $I_1 = \sigma_{ii}$ 、 $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ji}$  で表される。また、上式における偏差応力  $S_{ij}$  は、 $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij}$  で定義される。 $k$  は例えば粘着力と内部摩擦角で表わされ<sup>11)17)</sup>、 $k'$  はダイレタンシー角などに関係する。

また、係数  $\alpha$ 、 $\beta$  は、 $f$  および  $q$  における静水圧依存性を表す正のパラメータを示している。ここで、 $\alpha \neq \beta \rightarrow$  non-associated flow rule、 $\alpha = \beta \rightarrow$  associated flow rule となり、 $\alpha = \beta = 0$  のように、静水圧成分 (体積成分) を無視すると、von Mises 型弾塑性材料に帰着することはよく知られている。一般に、降伏曲面は係数  $\alpha$  の増加により圧縮側に移動し、これは高圧縮強度、低引張強度となることを示している。

次に、降伏関数  $f$  と塑性ポテンシャル関数  $q$  の曲面上における法線ベクトルは、式 (10)、(11) を応力テンソルで偏微分する (式 (5)) ことにより次式で表される。

$$n_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} S_{ij} + \alpha \delta_{ij} \quad (12)$$

$$m_{ij} = \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} S_{ij} + \beta \delta_{ij} \quad (13)$$

このように、Drucker-Prager 型非関連弾塑性構成則はかなり複雑になるが、文献<sup>14)</sup>に整理した。

## 3. 不連続面の発生条件と形成方向

ここでは、不連続面の発生条件に関する既往理論 (例えば、<sup>1)~4)</sup>、<sup>12)</sup>、<sup>13)</sup>) を総括し、いわゆる、局所化に関する特性テンソルによる解析法を review するものである。(一般解の展開については、例えば文献<sup>7)</sup>、<sup>13)</sup>、<sup>15)</sup> の表記法を踏襲する)

### 3.1 特性テンソルの定義と局所化の発生条件

まず、弾塑性状態にある一様な変位場  $\mathbf{u}$  を想定し、ここに不連続場が形成される条件 (分岐の発生条件) を考える。発生する不連続面 (discontinuity surface) において、変位速度  $\dot{\mathbf{u}}$  は連続、変位速度勾配  $\nabla \dot{\mathbf{u}}$  は不連続なものとする。これは  $C^0$ -連続体と呼ばれ、本研究の基

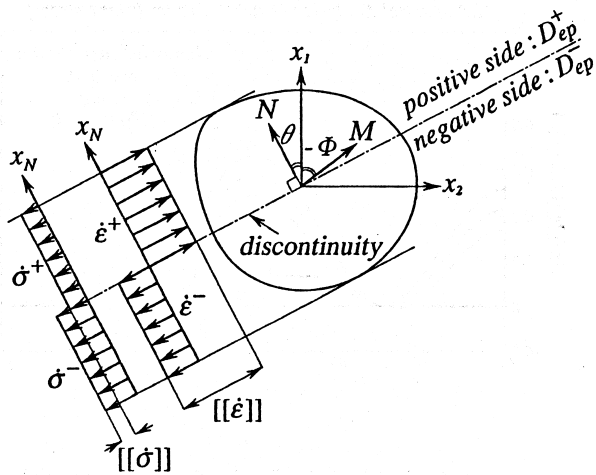


図-1 Formation of discontinuity surface with direction vectors M and N

本仮定であり、次式のように表すことができる。

$$[[\dot{u}]] = \dot{u}^+ - \dot{u}^- = 0^{**} \quad (14)$$

$$[[\nabla\dot{u}]] = \nabla\dot{u}^+ - \nabla\dot{u}^- \neq 0 \quad (15)$$

ここで、上付きの '+' と '-' は不連続面の正側と負側の値を示し、括弧は両者の相対的な差を表している(図-1)。ただし、正側と負側の絶対的な意味はなく、両側の差異のみが重要となる。また、Maxwellの適合条件により、変位速度勾配の差  $[[\nabla\dot{u}]]$  は次式で与えられる。

$$[[\nabla\dot{u}]] = \dot{\gamma} M \otimes N \quad (16)$$

上式において、ベクトル N は不連続面の直交方向、ベクトル M は不連続部の相対的な運動方向を表し(図-1)、N、Mともに単位ベクトルである。また、スカラー  $\dot{\gamma}$  は、変位速度勾配の差の大きさを表し、不連続面の発生時には不定(indeterminate)となる。さらに、不連続面に対する両側の相対的なひずみ速度の差  $[[\dot{\epsilon}]]$  は、式(16)で与えられた変位速度勾配の対称化テンソルとして次のように与えられる。

$$[[\dot{\epsilon}]] = \frac{1}{2} ([[ \nabla\dot{u} ]] + [[ \nabla\dot{u} ]]^T) = \frac{\dot{\gamma}}{2} (M \otimes N + N \otimes M) \quad (17)$$

次に、局所化の開始直前までは、材料が一様塑性状態にあると仮定するので、不連続面に相対する両側の構成関係式は、共通な弾塑性テンソル  $D_{ep}$  によって次式のように表される。

$$\dot{\sigma}^+ = D_{ep} : \dot{\epsilon}^+, \quad \dot{\sigma}^- = D_{ep} : \dot{\epsilon}^- \quad (18)$$

ここで、 $D_{ep}$  は、弾塑性接線剛性を示し、第2節にて提示した通りである。

\*\* 第3.1小節と第5節に限って、数式はすべてテンソル表示とする。従って、例えば、変位については  $\dot{u} = \dot{u}_i$ 、応力は  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{ij}$  のように対応し、テンソル積については  $M \otimes N = M_i N_j$  となる。

さらに、応力速度についても、 $[[\dot{\sigma}]] = \dot{\sigma}^+ - \dot{\sigma}^-$  によって示される応力の不連続量を生じ、これは式(18)より、次式のような構成表現で与えられることがわかる。

$$[[\dot{\sigma}]] = D_{ep} : [[\dot{\epsilon}]] \quad (19)$$

弾塑性材料における不連続解析に関して、いわゆる局所化に関する特性テンソル  $Q_{ep}$  が用いられ、これは2階のテンソルとして次式のように定義される。\*\*\*

$$Q_{ep} = N \cdot D_{ep} \cdot N \quad (20)$$

ここで、不連続面に相対する両側の応力は不連続( $\dot{\sigma}^+ \neq \dot{\sigma}^-$ )となるが、不連続面の直交方向に作用するベクトル  $\dot{t}$  (traction) は連続でなければならない。すなわち、

$$[[\dot{t}]] = N \cdot [[\dot{\sigma}]] = 0 \quad (21)$$

上式に、式(17)、(19)を代入すると、次式を得ることができる。

$$\dot{\gamma} (N \cdot D_{ep} \cdot N) \cdot M = \dot{\gamma} Q_{ep} \cdot M = 0 \quad (22)$$

よって、式(22)の非自明解が  $\dot{\gamma} \neq 0$ 、 $M \neq 0$  の条件の下に存在することが、不連続面形成の必要条件となる。これは特性テンソルの行列式が、

$$\det(Q_{ep}) = 0 \quad (23)$$

となる必要がある。従って、 $\det(Q_{ep}) \neq 0$  の時は、 $\dot{\gamma} = 0$  となり、不連続面は形成されないことを意味する。

これは、局所化に関する特性テンソルが分岐問題において本質的な役割を果たすものであることを示唆するものである。言い換えると、ある変形履歴の間に、式(23)における局所化条件が最初に満足される時、不連続面は、

$$\det(N \cdot D_{ep} \cdot N) = 0, \quad \forall N = N_{crit} \quad (24)$$

によって示される  $N_{crit}$  の直交方向に沿って形成され、対応するベクトル  $M_{crit}$  は、局所化に関する特性テンソル  $Q_{ep}$  の固有ベクトルとして計算される。式(23)、(24)の条件は、楕円性の喪失(loss of ellipticity)とも呼ばれる。<sup>15),16)</sup>

### 3.2 解析結果

ここで、2次元場における弾塑性体を対象とし、いくつかの数値計算を実行し、不連続面の発生時期と形成方向・運動方向について考察する。

まず、2次元場における特性テンソル  $Q_{bc}^{ep}$  は、

$$Q_{bc}^{ep} = N_a D_{abcd}^{ep} N_a \quad (a, b, c, d = 1, 2) \quad (25)$$

のように定義され、このときのベクトル  $N_a$  と対応する固有ベクトル  $M_a$  を次のように記す。

$$N_a = (\cos \theta, \sin \theta)^T, \quad M_a = (\cos \phi, \sin \phi)^T \quad (26)$$

\*\*\* これは、波動理論との類似から、しばしば acoustic tensor と呼ばれ、このとき、ベクトル M は、polarization vector として定義される。

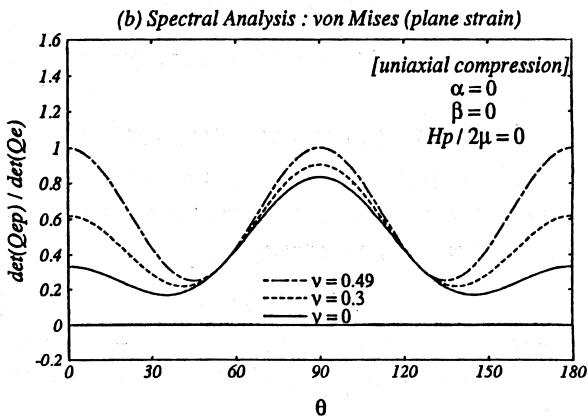
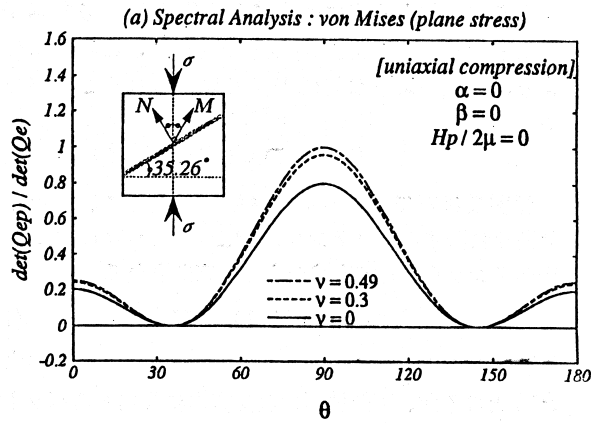


図-2 Uniaxial compression in (a) plane stress and (b) plane strain : von Mises (influence of  $\nu$ )

ここで、 $\theta$  と  $\phi$  の定義は、図-1 に示した通りである。

以下、2軸主応力  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  を受ける場合の数値シミュレーションを示すが、 $\sigma_1$  を主荷重、 $\sigma_2$  を従荷重とする。そして、応力比  $e = \sigma_2 / \sigma_1$  を変化させ、例えば、 $e = 0$  ( $\sigma_1 < 0$ )  $\rightarrow$  単軸圧縮、 $e = -1$   $\rightarrow$  純せん断のように制御する。また、主として角度  $\theta$  の変化に対する  $det(Q_{ep})$  のスペクトル応答を調べるとともに、その最小値もしくはゼロとなる  $\theta^{crit}$  に着目するものである。図中の縦軸は、 $det(Q_{ep}) / det(Q_e)$  のように、弾塑性特性テンソルの行列式を、弾性材料に対する特性テンソル  $Q_e = N \cdot D_e \cdot N$  の行列式 (常に  $det(Q_e) > 0$ ) で正規化したものである。まず、図-2 は von Mises の降伏条件 ( $\alpha = \beta = 0$ ) を用い、単軸圧縮における  $\theta$  を変化させたときのスペクトル解析結果を示したものである。その結果、 $\theta^{crit}$  は平面応力場ではポアソン比  $\nu$  の影響を受けないが ( $\theta^{crit} = 35.26^\circ$ )、平面ひずみ場では  $\nu$  が増大するに従い  $\theta^{crit}$  が大きくなる傾向がある。すなわち、一般に平面ひずみ場は、 $\dot{\epsilon}_{i3} = 0$  とすることにより、ポアソン比の影響を受けるとともに、局所化の条件を満足するには、 $H_p < 0$  (軟化状態) となる必要がある。次

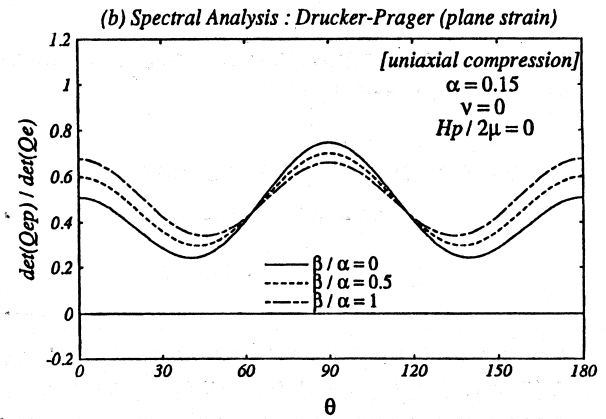
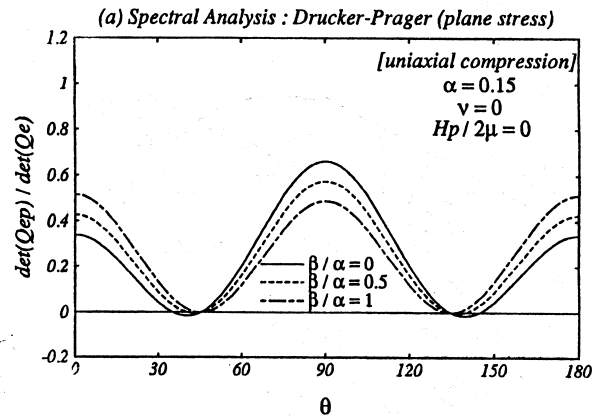


図-3 Uniaxial compression in (a) plane stress and (b) plane strain : Drucker-Prager (influence of  $\beta/\alpha$ )

に、Drucker-Prager 型の関連 / 非関連流れ則を用い、単軸圧縮における解析結果を図-3 に示した。ここで、非関連流れ則を採用したが、 $\beta/\alpha$  がその非関連の度合いを表しており、同図における解析パラメータとしている。その結果、 $\beta/\alpha$  は  $det(Q_{ep})$  の大きさに影響を及ぼし、特に平面応力の場合 ( $H_p = 0$  を入力)、 $\beta/\alpha$  が 1 より小さいほど、 $\theta^{crit}$  において  $det(Q_{ep})$  が負となっていることがわかる。従って、塑性係数が正值 ( $H_p > 0$ ) の時、 $det(Q_{ep}) = 0$  となることから、硬化中に分岐することを示し、ピーク応力前に不連続面が形成されることを示唆するものである。このような非関連性を導入することによる帰結は、既にいくつかの文献 (例えば、<sup>3)</sup>、<sup>16)</sup>) に認知されているが、上述のような定量的評価は少ない。

図-4 に、非関連流れ則による、平面ひずみ・純せん断における  $\theta$  に関するスペクトル解析結果を示すとともに、 $\theta$  と  $H_p / 2\mu$  に対する 3次元図化も示した。その結果、塑性係数  $H_p$  が増加するに従い、 $det(Q_{ep})$  の値が増加しているのがわかる。そこで、 $H_p / 2\mu = 0$  の場合に注目すると、 $det(Q_{ep})$  の最小値は負値となるの



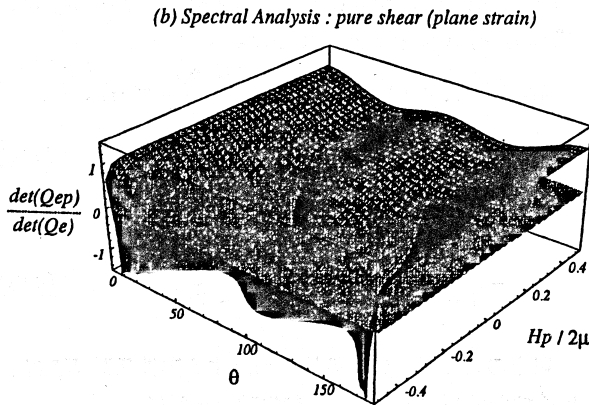
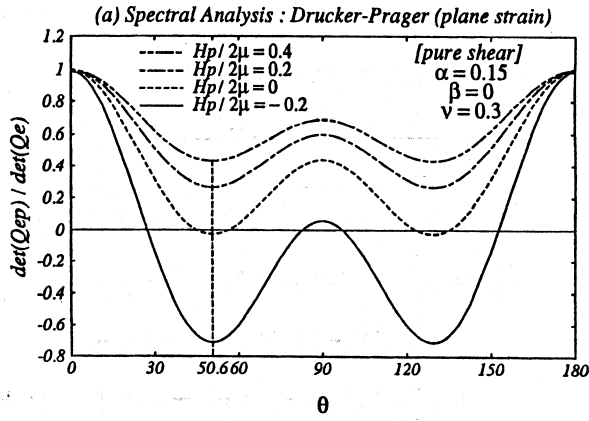


図-4 Pure shear in plane strain : (a)2D, (b)3D (influence of  $H^p/2\mu$ )

で、硬化過程中に局所化することがわかる。ただし、 $\det(Q_{ep})$  の最小値を与える角度  $\theta^{crit}$  は、塑性係数  $H_p$  に関係なく一定で、 $\theta^{crit} = 50.6^\circ$  であった。

#### 4. 特性テンソルの固有値解析による分岐条件の定式化

前節で議論された局所化の開始条件と不連続面の方向、および運動方向に関して、今度は局所化に関する特性テンソルの固有値問題として考え、その解析解の導出を試みるとともに、数値シミュレーションを実行する。ここでは、Runneson et al<sup>3)</sup> が固有値解析に用いた、一般化特性方程式をそのまま採用するが、より一般的な導出方法で分岐モードに対する固有値、固有ベクトルを求解する。

##### 4.1 特性テンソルの固有値解析

局所化に関する2階の弾塑性特性テンソル  $Q_{jk}^{ep}$  に対して、次式のような形式によって記述される一般化特性

方程式を考える<sup>3)</sup>。

$$Q_{jk}^{ep} M_k^{(i)} = \lambda^{(i)} Q_{ji}^e M_l^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (27)$$

ここで、局所化に関する弾塑性特性テンソル  $Q_{jk}^{ep}$  は、次式で表される。

$$Q_{jk}^{ep} = Q_{jk}^e - Q_{jk}^p$$

$$\text{ただし、} Q_{jk}^e = N_i E_{ijk}^e N_l, \quad Q_{jk}^p = N_i E_{ijk}^p N_l \quad (28)$$

また、弾性特性テンソル  $Q_{jk}^e$  は正定値であるため、逆行列  $[Q_{jk}^e]^{-1}$  をもち、これを式(27)の両辺に左乗すると、次式の固有方程式が得られる。

$$\hat{Q}_{jk} M_k^{(i)} = \lambda^{(i)} M_j^{(i)}$$

$$\text{ここで、} \hat{Q}_{jk} = [Q_{ji}^e]^{-1} Q_{jk}^{ep} = \delta_{jk} - [Q_{ji}^e]^{-1} Q_{jk}^p \quad (29)$$

ここで、 $\lambda^{(i)}$  は  $i$  番目の固有値、 $M_i^{(i)}$  は  $i$  番目の固有値に対応する固有ベクトルを示しているが、以降、このモード表示 ( $i$ ) は省略する。

一方、式(2)を用いると(弾塑性状態であるので  $\kappa = 1$  とすると)、弾塑性特性テンソル  $Q_{jk}^{ep}$  は、

$$Q_{jk}^{ep} = Q_{jk}^e - \frac{b_j a_k}{H_p + n_{mn} E_{mnpq}^e m_{pq}} \quad (30)$$

$$\text{あるいは、} \hat{Q}_{jk} = \delta_{jk} - \frac{[Q_{ji}^e]^{-1} b_j a_k}{H_p + n_{mn} E_{mnpq}^e m_{pq}} \quad (31)$$

のように記述できる。ただし、 $a_i$ 、 $b_i$  は次式となる。

$$a_i = n_{kl} E_{klij}^e N_j, \quad b_i = N_j E_{jikl}^e m_{kl} \quad (32)$$

さて、以上のように準備した特性方程式に基づき、その固有ベクトルと固有値の導出を試みる。まず、式(30)を特性方程式(27)に代入すると次式を得る。

$$(1 - \lambda) Q_{ji}^e M_l = \frac{b_j a_k M_k}{H_p + n_{mn} E_{mnpq}^e m_{pq}} \quad (33)$$

上式に、 $[Q_{ij}^e]^{-1}$  を左乗し、 $a_k M_k$  がスカラーであることに注意すると、固有ベクトルは、

$$M_i = \xi [Q_{ij}^e]^{-1} b_j$$

$$\text{ここで、} \xi = \frac{a_k M_k}{(1 - \lambda)(H_p + n_{mn} E_{mnpq}^e m_{pq})} \quad (34)$$

のように記述できることがわかる。

次に、固有値の求解については、式(33)にもどり、同式中の固有ベクトルに対して、式(34)を代入し、最終的に次のように整理することができる。

$$\lambda = 1 - \frac{a_i [Q_{ij}^e]^{-1} b_j}{H_p + n_{mn} E_{mnpq}^e m_{pq}} = 1 - [Q_{ij}^e]^{-1} Q_{ji}^p \quad (35)$$

以上が3次元問題における記述であり、2次元問題については、弾塑性特性テンソル

$$Q_{bc}^{ep} = Q_{bc}^e - Q_{bc}^p = Q_{bc}^e - \frac{b_b a_c}{A} \quad (36)$$

について同様な解析を行えばよい。ここで、本論の場合、2次元問題における固有モードは2組存在するが、これは弾性モードと塑性モードに区別される。これら両

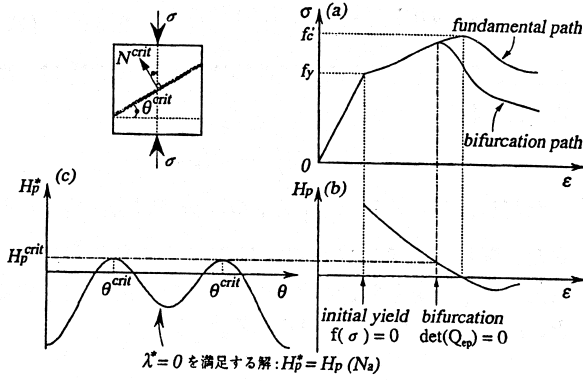


図-5 (a)Schematic description of fundamental/bifurcatal paths, (b)Plastic modulus  $H_p^*$ , (c)Spectral analysis of plastic modulus

モードの解は、結果のみを示すと、次のように整理できる<sup>14)</sup>。

elastic mode :  $\lambda = 1$ ,  $M_b \propto a_b$  の直交ベクトル (37)

plastic mode :  $\lambda^* = 1 - \frac{1}{A} a_b [Q_{ba}^e]^{-1} b_a$

$$M_b^* \propto [Q_{ba}^e]^{-1} b_a \quad (38)$$

ここで、塑性モードについては、特に \* を付け、次節にて活用される。

このようにして得られた、弾塑性材料に対する一般化特性方程式の解析解は、Runesson ら<sup>3)</sup> のそれらと合致するものであり、本論は異なる手法で追認したことになる。

#### 4.2 分岐条件に関する解析解 (臨界点の定式化)

2階の弾塑性特性テンソルの行列式  $\det(\hat{Q}_{bc})$  に対し、1つの固有値が  $\lambda = 1$  であるので、局所化の発生条件である  $\det(\hat{Q}_{bc}) = 0$  を満足するためには、もう一方の固有値が  $\lambda^* = 0$  となる必要がある。従って、 $\det(\hat{Q}_{bc}) = 0$  を満足する条件は、式(38)より次のように表わすことができる。

$$\lambda^* = 1 - \frac{1}{A} a_b [Q_{ba}^e]^{-1} b_a = 0 \rightarrow A = a_b [Q_{ba}^e]^{-1} b_a \quad (39)$$

上式を、式(9)に代入し、 $\det(\hat{Q}_{bc}) = 0$  とする塑性係数  $H_p^*$  を次のように求解した(前述のとおり、平面応力に対する解を a、平面ひずみの場合を b として、式番号に付記する)。

$$H_p^* = -n_{ef} E_{efgh}^e m_{gh} + a_b [Q_{ba}^e]^{-1} b_a \quad (40a)$$

$$H_p^* = -n_{ij} E_{ijkl}^e m_{kl} + a_b [Q_{ba}^e]^{-1} b_a \quad (40b)$$

一方、平面応力・平面ひずみ場における局所化に関する弾性特性テンソル  $Q_{bc}^e$  は、式(28)を2次元場に改め、式(7)を代入することにより、具体的に次式を導く。

$$Q_{bc}^e = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} N_b N_c + \delta_{bc} \right) \quad (41a)$$

$$Q_{bc}^e = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{1-2\nu} N_b N_c + \delta_{bc} \right) \quad (41b)$$

従って、 $H_p^*$  は最終的に次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{H_p^*}{E} = & \frac{1}{1+\nu} \{ 2N_a n_{ac} m_{cb} N_b - \nu n_{ee} m_{ff} \\ & + \nu N_a (m_{cc} n_{ab} + n_{cc} m_{ab}) N_b - n_{ef} m_{ef} \\ & - (1+\nu) (N_a n_{ac} N_c) (N_b m_{bd} N_d) \} \quad (42a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H_p^*}{E} = & \frac{1}{1+\nu} \{ 2N_a n_{ac} m_{cb} N_b - \frac{\nu}{1-\nu} n_{ii} m_{jj} \\ & - \frac{1}{1-\nu} (N_a n_{ac} N_c) (N_b m_{bd} N_d) - n_{ij} m_{ij} \\ & + \frac{\nu}{1-\nu} N_a (m_{kk} n_{ab} + n_{kk} m_{ab}) N_b \} \quad (42b) \end{aligned}$$

また、固有値  $\lambda^* = 0$  に対応する固有ベクトル  $M_b^*$  は、式(38)を用い、次式を導出した。

$$\begin{aligned} M_b^* = & -(1+\nu) m_{ca} N_c N_b N_a + \frac{2\nu}{1-\nu} N_b m_{cc} \\ & - \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} N_b N_a N_a m_{cc} + 2m_{cb} N_c \quad (43a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_b^* = & -\frac{\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} N_b N_a N_a m_{mm} + 2m_{cb} N_c \\ & - \frac{1}{1-\nu} m_{ca} N_c N_b N_a + \frac{2\nu}{1-2\nu} N_b m_{mm} \quad (43b) \end{aligned}$$

以上のように、分岐条件を満足する塑性係数  $H_p^*$  は、いくつかのパラメータを含むので、一般に

$$H_p^* = H_p^*(n_{ab}, m_{ab}, N_a, E, \nu) \quad (44)$$

のように表示することができる。ここで、 $N_a$  以外は材料および荷重条件が特定されたとき既知量となるので、弾塑性体に対する分岐臨界点は、塑性係数  $H_p^*$  が、次式のように臨界塑性係数  $H_p^{crit}$  (critical plastic modulus) となるときの与えられる(図-5)。

$$H_p^* = H_p^{crit}, \quad H_p^{crit} = \max_{|N_a|=1} [H_p^*] \quad (45)$$

従って、本章で考えている2次元場では、

$$\frac{\partial H_p^*}{\partial (N_1^2)} |_{N_1^2+N_2^2=1} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_p^*}{\partial (N_1^2)^2} |_{N_1^2+N_2^2=1} < 0 \quad (46)$$

のように表すことができる。すなわち、上式を満足する  $N_a$  が最弱面の法線ベクトルを表し、その直交方向に不連続面として形成される。また、上式を満たす  $H_p^*$  を  $H_p^{crit}$  とし、そのときの  $N_a$  を  $N_a^{crit}$  およびその角度を  $\theta^{crit}$ 、対応する固有ベクトルを  $M_a^{crit}$  およびその角度を  $\phi^{crit}$  のように記述するものとする。次節にて、平面応力・平面ひずみに対する解析解を導出、例示する。

図-5は、硬化/軟化弾塑性材料の塑性変形過程における分岐に関する臨界点を模式的に描いたものである。すなわち、(a)は弾塑性材料の応力～ひずみ関係、(b)はこのときの塑性係数の変化を示し、一方、(c)は  $\lambda^* = 0$  を満足する  $H_p^* = H_p^*(\theta)$  のスペクトル特性(式(42)で与えられる)を併記したものである。従って、ある予想される塑性履歴において、塑性係数が  $H_p = \max[H_p^*]$

となった時点で、まず最初の局所化条件 ( $\det(\hat{Q}_{bc}) = 0$ ) を満足することになり、不連続面の形成に至る。

(a) 平面応力場における解:  $n_{ab}$  と  $m_{ab}$  の主値に対して、 $n_{aa} = n_a$ 、 $m_{aa} = m_a$  (総和はとらない) のように表示するものとし、式(46)を満たす  $N_a^{crit}$  の方向  $\theta^{crit}$  は、次式で表される。

$$\tan^2 \theta^{crit} = -\frac{n_2(m_1 - m_2) + m_2(n_1 - n_2)}{n_1(m_1 - m_2) + m_1(n_1 - n_2)} \quad (47)$$

また、これに対応する臨界塑性係数  $H_p^{crit}$  は、次式で表される。

$$\frac{H_p^{crit}}{E} = \frac{(n_2 m_1 - n_1 m_2)^2}{4(n_1 - n_2)(m_1 - m_2)} \geq 0 \quad (48)$$

さらに、 $N_a^{crit}$  に対応する固有ベクトル  $M_a^{crit}$  の方向  $\phi^{crit}$  は、式(43a)より次式で求められる。

$$\tan \phi^{crit} = \frac{M_2^{crit}}{M_1^{crit}} \quad (49)$$

ここで、 $M_1^{crit}$ 、 $M_2^{crit}$  は、以下に示すものである。

$$\begin{aligned} M_1^{crit} &= \{2m_1 - (1 + \nu)(m_1 N_1^{crit2} + m_2 N_2^{crit2}) \\ &\quad + \nu(m_1 + m_2)\} N_1^{crit} \\ M_2^{crit} &= \{2m_2 - (1 + \nu)(m_1 N_1^{crit2} + m_2 N_2^{crit2}) \\ &\quad + \nu(m_1 + m_2)\} N_2^{crit} \end{aligned} \quad (50)$$

(b) 平面ひずみ場における解: 前例と同様に、 $n_{ij}$  と  $m_{ij}$  の主値に対して  $n_{ii} = n_i$ 、 $m_{ii} = m_i$  (総和はとらない) のように表示するものとし、式(46)を満たす  $N_a^{crit}$  の方向  $\theta^{crit}$  は、次式で表される。

$$\tan^2 \theta^{crit} = -\frac{n_2(m_1 - m_2) + m_2(n_1 - n_2) + \nu h}{n_1(m_1 - m_2) + m_1(n_1 - n_2) + \nu h} \quad (51)$$

ただし、 $h = n_3(m_1 - m_2) + m_3(n_1 - n_2)$

また、これに対応する臨界塑性係数  $H_p^{crit}$  は、

$$\begin{aligned} \frac{H_p^{crit}}{E} &= -\frac{n_3 m_3}{(1 - \nu)(1 + \nu)} \\ &\quad + \frac{(n_1 m_2 - n_2 m_1)^2 + \nu^2 h^2}{4(1 - \nu)(1 + \nu)(n_1 - n_2)(m_1 - m_2)} \\ &\quad + \frac{2\nu(n_1 m_2 - n_2 m_1)\{m_3(n_1 - n_2) - n_3(m_1 - m_2)\}}{4(1 - \nu)(1 + \nu)(n_1 - n_2)(m_1 - m_2)} \end{aligned} \quad (52)$$

で表される。さらに、 $N_a^{crit}$  に対応する固有ベクトル  $M_a^{crit}$  の方向  $\phi^{crit}$  は、式(43)より次式で求められる。

$$\tan \phi^{crit} = \frac{M_2^{crit}}{M_1^{crit}} \quad (53)$$

ここで、 $M_1^{crit}$ 、 $M_2^{crit}$  は、以下に示すものである。

$$\begin{aligned} M_1^{crit} &= \{2m_1 - \frac{1}{1 - \nu}(m_1 N_1^{crit2} + m_2 N_2^{crit2}) \\ &\quad + \frac{\nu}{1 - \nu}(m_1 + m_2 + m_3)\} N_1^{crit} \\ M_2^{crit} &= \{2m_2 - \frac{1}{1 - \nu}(m_1 N_1^{crit2} + m_2 N_2^{crit2}) \\ &\quad + \frac{\nu}{1 - \nu}(m_1 + m_2 + m_3)\} N_2^{crit} \end{aligned} \quad (54)$$

### 4.3 Drucker-Prager の降伏条件への適用

前出の解析解に対して、Drucker-Prager 型の非関連流れ則を適用し、平面応力場と平面ひずみ場に対して具体的な導出結果を提示する。

式(47)、(51)より、ベクトル  $N_a$  の方向  $\theta^{crit}$  は、次式で表される。

$$\tan^2 \theta^{crit} = -\frac{S_2 + \sqrt{J_2}(\alpha + \beta)}{S_1 + \sqrt{J_2}(\alpha + \beta)} \quad (55a)$$

$$\tan^2 \theta^{crit} = -\frac{(S_2 + \nu S_3) + (1 + \nu)\sqrt{J_2}(\alpha + \beta)}{(S_1 + \nu S_3) + (1 + \nu)\sqrt{J_2}(\alpha + \beta)} \quad (55b)$$

ここで、式(55b)においてポアソン比をゼロ ( $\nu = 0$ ) とおくと、これは式(55a)に帰着する。また、これに対応する臨界塑性係数  $H_p^{crit}$  は、式(48)、(52)より次式で表される。

$$\frac{H_p^{crit}}{E} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} \geq 0 \quad (56a)$$

$$\begin{aligned} \frac{H_p^{crit}}{E} &= \frac{1}{4(1 - \nu)} \{2(\alpha - \beta)^2 \\ &\quad - (1 - \nu)(\frac{S_3}{\sqrt{J_2}} + \alpha + \beta)^2\} \end{aligned} \quad (56b)$$

式(56a)は、非負 ( $H_p^{crit} \geq 0$ ) であることを示しているが、 $\alpha = \beta$  (関連流れ則) の場合  $H_p^{crit} = 0$ 、 $\alpha \neq \beta$  (非関連流れ則) の場合  $H_p^{crit} > 0$  となり、例えば、 $\alpha = 0.1$ 、 $\beta = 0$  のとき  $H_p^{crit}/E = 0.0025$  となる。すなわち、平面応力では、関連流れ則の場合、応力ピーク点 ( $H_p = 0$ ) において、また、非関連流れ則の場合、応力ピーク前の硬化過程 ( $H_p > 0$ ) において、局所化が開始することを意味するもので、図-3にて考察したとおりである。以上の解析結果を用い、非関連流れ則とした場合の平面応力・平面ひずみ場における  $\theta^{crit}$  と応力比  $e = \sigma_2/\sigma_1$  (いずれも、 $\sigma_1 < 0$ ) との関係を求め、図-6に示した。平面応力の場合、純せん断 ( $e = -1$ ) から、圧縮側に推移するに従い、 $\theta^{crit}$  が減少し、2軸圧縮もしくはそれに近い状態 ( $e > 0.6$ ) では局所化状態を満足しないことを示すとともに、ポアソン比の影響を受けていないこともわかる。一方、平面ひずみの場合、ポアソン比  $\nu$  の影響により、局所化を起こす応力比  $e$  の範囲が拡大しており、 $\nu$  が大きいほど  $\theta^{crit}$  が大きくなるのがわかる。次に、Drucker-Prager 型の非関連流れ則を用い、平面応力・平面ひずみ場における  $\theta^{crit}$  と、これに対応する  $\theta^{crit} - \phi^{crit}$  を応力比  $e$  の関係を求め、図-7に併記した。ここで、不連続面の法線ベクトルの方向  $\theta^{crit}$  と不連続運動方向  $\phi^{crit}$  との交角 ( $\theta^{crit} - \phi^{crit}$ ) は、相対的な動きの方向を表している。従って、例えば、破壊力学におけるモード分類にあてはめると、 $\theta^{crit} - \phi^{crit} = 0^\circ$  が Mode 1、 $\theta^{crit} - \phi^{crit} = 90^\circ$  が Mode 2 に対応する。以上のように、局所化の変形モードに関する基本量 (形成方向、時期、運動方向) を解析的に把握することができたと言える。

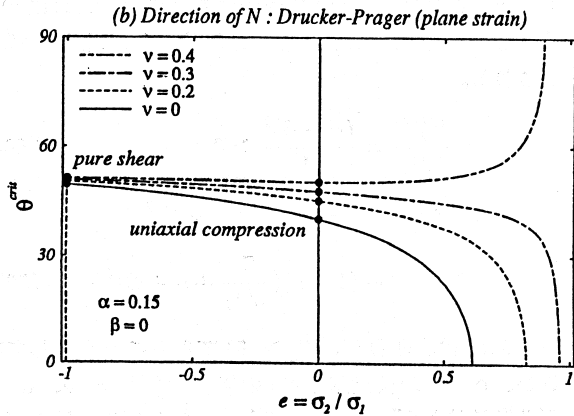
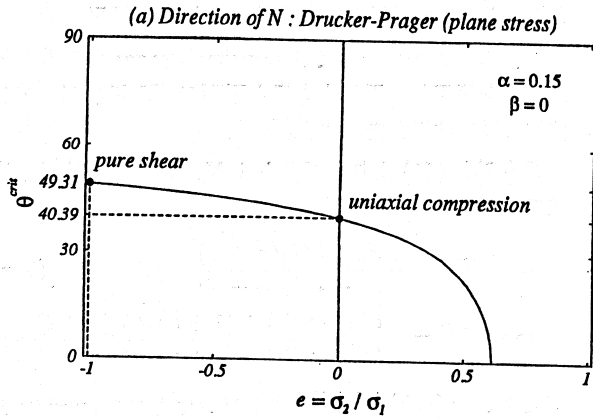


図-6 Direction of N in (a) plane stress and (b) plane strain : Drucker-Prager (influence of  $\nu$ )

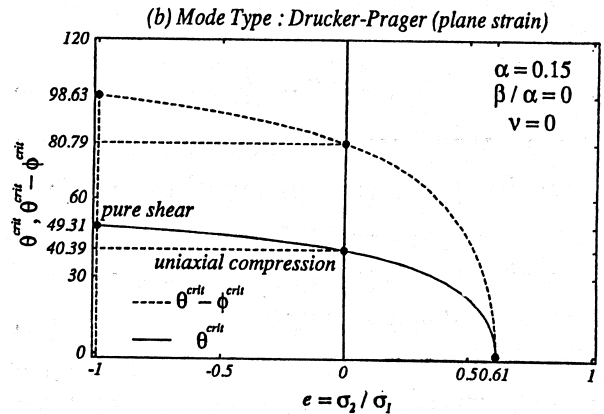
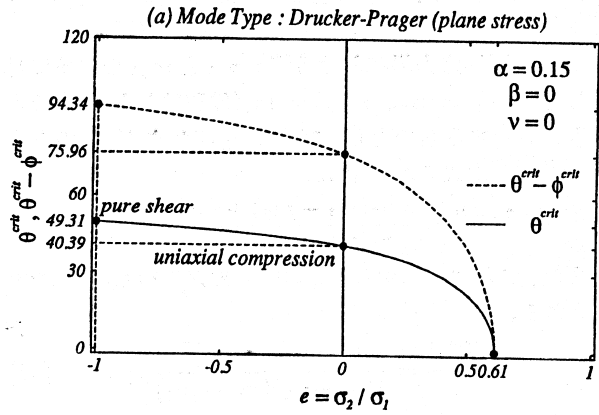


図-7 Direction of N and M in (a) plane stress and (b) plane strain : Drucker-Prager

### 5. 5. 分岐現象を含む材料の変形挙動

弾塑性材料の分岐発生時期とその方向は、前節までに論じたとおりで、 $\det(\mathbf{Q}_{ep}) = 0$ 、もしくは $\lambda^* = 0$ となることを条件として与えられる。ここでは、このような分岐条件が満足された後の変形挙動について考察するもので、これは図-8のように説明することができる。同図は、(a) 分岐現象を含む材料の変形挙動と(b) 不連続面に相対する両側のひずみの関係を模式的に表したものである。

そこで、弾塑性材料における局所化開始後(分岐後)の材料の変形挙動を記述するため、Yoshikawa・Willamの提唱する分岐後の弾塑性構成則<sup>12)</sup>を採用する。ただし、以上のような議論に加えて、材料の構成関係(式(1))そのものの解の一意性を考える必要があるが、これについては文献<sup>3)</sup>、<sup>15)</sup>を参考されたい。まず、図-1に示したような不連続面に相対する両側の構成則を次式のように再定義する。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^+ &= \mathbf{D}_{ep}^+ : \dot{\epsilon}^+, \quad \mathbf{D}_{ep}^+ = \mathbf{D}_{ep}(\epsilon^+, \sigma^+) \\ \dot{\sigma}^- &= \mathbf{D}_{ep}^- : \dot{\epsilon}^-, \quad \mathbf{D}_{ep}^- = \mathbf{D}_{ep}(\epsilon^-, \sigma^-) \end{aligned} \quad (57)$$

ただし、 $\mathbf{D}_{ep}^+$ 、 $\mathbf{D}_{ep}^-$ は、不連続面に対する正側と負側の弾塑性接線剛性を表している。これは、分岐後において、ひずみや応力状態が異なるため、これに依存する弾塑性接線剛性 $\mathbf{D}_{ep}$ が乖離することによるものである。このような仮定は、分岐後も不連続面の両側では塑性载荷状態が持続することを前提とするもので、塑性/塑性分岐(plastic/plastic bifurcation)と呼ばれる。一方、 $\mathbf{D}_{ep}^+ \rightarrow \mathbf{D}_{ep}$ 、 $\mathbf{D}_{ep}^- \rightarrow \mathbf{E}_e$ のように仮定すると、これは、不連続面の正側は塑性载荷、負側は弾性除荷することを意味し、いわゆる弾性/塑性分岐(elastic/plastic bifurcation)にも適用することができる。

次に、分岐後の弾塑性構成則を定式化するため、次のような3つの条件を再記する。

1. ひずみ速度の分解： $\dot{\epsilon}^+ = \dot{\epsilon}^- + [[\dot{\epsilon}]]$
  2. 両側の相対的なひずみ速度の差： $[[\dot{\epsilon}]] = \dot{\gamma}[\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}]^s$  \*\*\*\*
  3. N方向のベクトル $\dot{\epsilon}$ の釣合： $[[\dot{\epsilon}]] = \mathbf{N} \cdot [[\dot{\sigma}]] = 0$
- そこで、式(57)と条件1より、不連続面に対する両

\*\*\*\* ここで、添字 $s$ は、非対角項の平均化を示し、 $[\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}]^s = (\mathbf{M} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{M})/2$ となる。

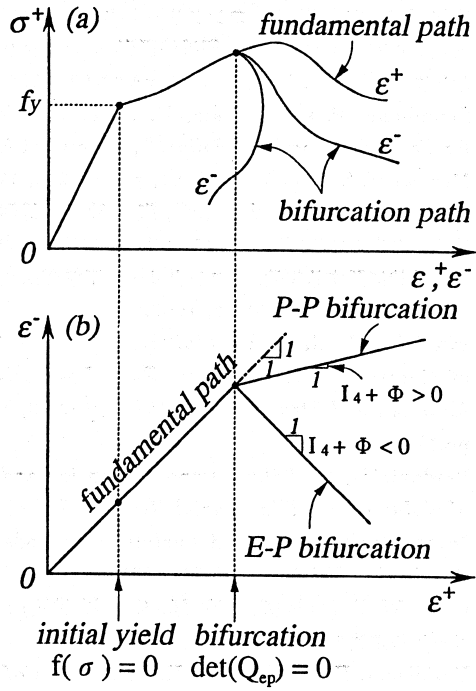


図-8 (a) Schematic description of fundamental/bifurcatal paths, (b) Relationship between two strain tensors across discontinuity

側の相対的な応力の差  $[[\dot{\sigma}]]$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} [[\dot{\sigma}]] &= \dot{\sigma}^+ - \dot{\sigma}^- = \mathbf{D}_{ep}^+ : [[\dot{\epsilon}]] - [[\mathbf{E}_p]] : \dot{\epsilon}^- \\ [[\dot{\sigma}]] &= \dot{\sigma}^+ - \dot{\sigma}^- = \mathbf{D}_{ep}^- : [[\dot{\epsilon}]] - [[\mathbf{E}_p]] : \dot{\epsilon}^+ \quad (58) \end{aligned}$$

また、不連続面に対する両側の相対的なひずみ速度の差  $[[\dot{\epsilon}]]$  の大きさを表す  $\dot{\gamma}$  は、式(58)と条件2、3より次のように与えられる。

$$\dot{\gamma} = \frac{[\mathbf{N} \otimes \mathbf{M}]^s : [[\mathbf{E}_p]] : \dot{\epsilon}^-}{\mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}_{ep}^+ \cdot \mathbf{M}} = \frac{[\mathbf{N} \otimes \mathbf{M}]^s : [[\mathbf{E}_p]] : \dot{\epsilon}^+}{\mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}_{ep}^- \cdot \mathbf{M}} \quad (59)$$

ただし、 $[[\mathbf{E}_p]] \equiv \mathbf{E}_p^+ - \mathbf{E}_p^- = \mathbf{D}_{ep}^- - \mathbf{D}_{ep}^+$

$\dot{\gamma}$  の物理的な解釈は、不連続面に対する両側の相対的なひずみ速度の差  $[[\dot{\epsilon}]]$  の大きさを与えるものである。例えば、両側の相対するひずみ速度が連続 ( $\dot{\epsilon}^+ = \dot{\epsilon}^-$ ) なとき、 $\dot{\gamma}$  はゼロとなり、非分岐状態もしくは分岐前であることを意味する。一方、 $\det(\mathbf{Q}_{ep}) = 0$  なる分岐条件に達した瞬間は、まだ両側の材料が同一の弾塑性構成則を有し ( $\mathbf{D}_{ep}^+ = \mathbf{D}_{ep}^-$ )、式(59)の分子はゼロとなるとともに、分母もゼロとなり、 $\dot{\gamma}$  は不定となる。しかし、不連続面が保持され、変形を持續することにより、 $\dot{\gamma}$  は有限の値を持つことになる。すなわち、このような分岐後の応力～ひずみ関係を再現することが、第5節の解析対象である。

そこで、不連続面に対する両側の相対的なひずみ速度の差  $[[\dot{\epsilon}]]$  は、式(59)に  $[\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}]^s$  を乗じ、正側のひずみ

速度  $\dot{\epsilon}^+$  により次のように表することができる。

$$[[\dot{\epsilon}]] = \Psi : \dot{\epsilon}^+ \quad (60)$$

従って、負側のひずみ速度は、

$$\dot{\epsilon}^- = (\mathbf{I}_4 - \Psi) : \dot{\epsilon}^+ \quad (61)$$

のように与えられる。ただし、 $\Psi$  は、無次元の4階のテンソルとして次式のように定義した。

$$\Psi = \frac{[\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}]^s \otimes [\mathbf{N} \otimes \mathbf{M}]^s : [[\mathbf{E}_p]]}{\mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}_{ep}^- \cdot \mathbf{M}} \quad (62)$$

従って、最終的に次式のような関係式が得られる。

$$\dot{\sigma}^- = \begin{cases} \mathbf{D}_{ep}^- : \dot{\epsilon}^- \\ \mathbf{D}_{ep}^- : (\mathbf{I}_4 - \Psi) : \dot{\epsilon}^+ \end{cases} \quad (63)$$

ここで、 $\mathbf{I}_4$  は、4階の単位テンソルを表し、 $\mathbf{I}_4 = \delta_{ik} \delta_{jl}$  のように記述される。このように、不連続面に相対する両側の異なるひずみ速度は、 $\Psi$  によって陽に関係づけられることがわかる。

ここで、弾性/塑性分岐 ( $\mathbf{D}_{ep}^+ \rightarrow \mathbf{D}_{ep}$ 、 $\mathbf{D}_{ep}^- \rightarrow \mathbf{E}_e$ ) を考えた場合、式(62)を用い、弾性側の応力速度は塑性側のひずみ速度によって次のように表される。

$$\dot{\sigma}^- = \left\{ \mathbf{E}_e - \frac{[\mathbf{E}_e : [\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}]^s \otimes [\mathbf{N} \otimes \mathbf{M}]^s : \mathbf{E}_p^+]}{[\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}]^s : \mathbf{E}_e : [\mathbf{N} \otimes \mathbf{M}]^s} \right\} : \dot{\epsilon}^+ \quad (64)$$

以上のように、弾性側のひずみ速度は塑性側のひずみ速度により算出され、分岐後の応力～ひずみ関係は、例えば塑性側のひずみ制御によって描くことができる<sup>18)</sup>。

## 6. 結論

本研究は、非関連弾塑性材料を対象とし、局所化に関する諸条件を解析的に考察したが、得られた知見および結果について、以下にまとめる。

- I. 不連続面の発生に伴うひずみの局所化について、既往理論を整理した。これによると、局所化に関する弾塑性特性テンソル  $\mathbf{Q}_{ep} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}_{ep} \cdot \mathbf{N}$  の行列式が、 $\det(\mathbf{Q}_{ep}) = 0$  を満たすとき、不連続面は  $\mathbf{N}_{crit}$  の直交方向に沿って形成される。これを、Drucker-Prager型弾塑性構成則に導入するとともに、2次元問題に適用し、種々の数値シミュレーションを実施した。
- II. 局所化に関する弾塑性特性テンソル  $\mathbf{Q}_{ep}$  の固有値解析により、次のような固有値・固有ベクトルを導いた。

$$\begin{aligned} \lambda^* &= 1 - \frac{1}{A} \mathbf{a} \cdot [\mathbf{Q}_e]^{-1} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{M}^* &\propto [\mathbf{Q}_e]^{-1} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

- III. さらに、 $\lambda^* = 0$  なる条件から次のような局所化条件(塑性モード)の解析解を導出した。

$$\mathbf{H}_p^* = -\mathbf{n} : \mathbf{E}_e : \mathbf{m} + \mathbf{a} \cdot [\mathbf{Q}_e]^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

IV. 次に、分岐条件が最も早く達成される臨界点について考察し、この時の局所化の形成方向  $\theta^{crit}$  と対応する臨界塑性係数  $H_p^{crit}$  を求解した。これは、例えば、平面応力の場合、次式となる。

$$\tan^2 \theta^{crit} = -\frac{S_2 + \sqrt{J_2(\alpha + \beta)}}{S_1 + \sqrt{J_2(\alpha + \beta)}}$$

$$\frac{H_p^{crit}}{E} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} \geq 0$$

不連続面の発生時期については、一般に平面応力は硬化過程中 ( $H_p \geq 0$ ) に生じ、平面ひずみより早期となり、非関連速度が大きい程著しい。

V. さらに、分岐現象を含む材料の変形挙動に関する解析法についても定式化を行った。この場合、不連続面に相対する両側のひずみ速度および構成関係式は、次式で関係づけられる。

$$\dot{\epsilon}^- = (\mathbf{I}_4 - \Psi) : \dot{\epsilon}^+$$

$$\dot{\sigma}^- = \begin{cases} \mathbf{D}_{ep}^- : \dot{\epsilon}^- \\ \mathbf{D}_{ep}^- : (\mathbf{I}_4 - \Psi) : \dot{\epsilon}^+ \end{cases}$$

謝辞：本研究は、第一著者がコロラド大学環境建築学科に客員教授として滞在中の研究を端緒とするものである。本文にて、受け入れ大学の Kasper Willam 教授および私学振興財団に謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) Hill, R. : "A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids", *Mechanics and Physics of Solids*, 6, pp.236-249, 1958.
- 2) Bigoni, D. and Hueckel, T. : "Uniqueness and Localization- 1. Associative and Non-associative Elastoplasticity", *Int. J. Solids Structures*, 28/2, pp.197-213, 1991.
- 3) Runesson, K., Ottosen, N. S., and Peric, D. : "Discontinuous Bifurcation of Elasto-Plastic Solutions in Plane Stress and Plane Strain", *International Journal of Plasticity*, Vol.7, pp.99-121, 1991.
- 4) Yoshikawa, H. : "Fundamental Study on Strain Localization as Bifurcation Problem for Elasto-Plastic Materials", *Research Report, CEAE-Department, Univ. of Colorado at Boulder*, 43 pp., 1993.
- 5) Bazant, Z. P. : "Stability of Structures, -Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theory-", *Oxford Univ. Press*, 1991.

- 6) 服部 尚道, 吉川 弘道 : コンクリートのひずみの局所化と安定 / 不安定条件に関する解析的研究, , コンクリート工学年次論文報告集, Vol.15, No.2, pp.63-68, 1993.
- 7) Steinmann, P. and Willam, K. : "Finite Elements for Capturing Localized Failure", *Archive of Applied Mechanics*, Springer-Verlag, 61, pp.259-275, 1991.
- 8) 西野 和弥, 村上 雅英, 大谷 恭弘, 窪田 敏行 : 低側圧 3 軸圧縮応力を受けるプレーンコンクリートの最大応力以降の破壊性状に関する実験, , コンクリート工学年次論文報告集, Vol.15, No.2, pp.51-56, 1993.
- 9) van Mier, J. G. M. : "Multiaxial Strain-Softening of Concrete, Part1:Fracture, Part2:Load Historise, Materials and Structures", *RILEM*, Vol.19, No.111, pp.179-200, 1986.
- 10) Vardoulakis, I. : "Shear Band Inclination and Shear Modulus of Sand in Biaxial Tests", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.4, pp.103-119, 1980.
- 11) Chen, W. F. (色部 誠、河角 誠、安達 洋 監訳) : コンクリート構造物の塑性解析, 丸善, 1983.
- 12) Yoshikawa, H. and Willam, K. : "Analysis of Localized Failure in Elasto-Plastic Solids", *IUTAM Symposium*, 1995.(to be published)
- 13) Willam, K. and Sobh, N. : "Bifurcation Analysis of Tangential Material Operators", *Conf. Proc. NUMETA '87: Volume 2 G.N. Pande and J.Middleton, eds., Martinus Nijhoff Publ., C4/1, 15 pp., 1987.*
- 14) 服部 尚道 : 弾塑性材料におけるひずみの局所化に関する解析的研究, 武蔵工業大学修士論文, 68pp., 1994.
- 15) Willam, K. and Dietsche, A. : "Fundamental Aspects of Strain-softening Descriptions", *Proceedings of the FRAMCOS-1 (Fracture Mechanics of Concrete Structure)*, Elsevier Applied Science, June, 1992.
- 16) Nielsen, M.K. and Schreyer, H.L. : "Bifurcation in Elastic-Damaging Materials", *AMD-Vol.142/MD-Vol.34, Damage Mechanics and Localization ASME*, pp.109-123, 1992.
- 17) Z.S.Wu and T.Tanabe : "A Hardening/Softening Model of Concrete Subjected to Compressive Loading", *Journal of Structural Engineering, Architectural Institute of Japan*, Vol.36B, pp.153-162, March, 1990.
- 18) 長野 竜馬 : 弾塑性理論に基づく構成則, 武蔵工業大学修士論文, 1995.

(1995年1月23日 受付)