主要確率分布

学生氏名　石井　輝尚 石川　雄嗣
指導教員　吉川　弘道

1．主要確率分布の数学的記述

(1) 正規分布(normal distribution)

正規分布は天文学上の測定誤差に関連してガウス(Gauss)によって発見されたが，連続的変量の分布は正規分布に従うものが多い．正規分布はいろいろな型の分布の中心的存在であって，理論的にも実用面でも最も重要な分布である．**式 (1)** に正規分布の密度関数(probability density function)を示す．

$$f_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad -\infty < x < \infty \qquad (1)$$

ここで，μ，σは分布のパラメータであるが，これらは変量の平均値(mean value)，標準偏差(standard deviation)であり，$N(\mu,\sigma^2)$で表す．なお，N(0,1)である正規分布のことを標準正規分布(standard normal distribution)と呼ぶ．

(2) 対数正規分布(logarithmic normal distribution)

確率変数の自然対数が正規分布に従う時，その確率分布は対数正規分布と呼ばれる．**式 (2)** に対数正規分布の確率密度関数を示す．

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta_x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right] \qquad 0 \leqq x < \infty \qquad (2)$$

$$\lambda = E(\ln X), \quad \zeta = \sqrt{Var(\ln X)} \qquad (3)\ (4)$$

こでも，λ，ζは lnX の平均値，標準偏差であり分布を表す特性である．

(3) β分布(beta distribution)

β分布とは，正規分布や対数正規分布とは異なり，分布関数の範囲（確率変数のとる値）が無限値ではなく任意の値（有限値），すなわち上下限値を設定することができる確率分布である．上下限値を設定できるβ分布の確率密度関数は，**式 (5)** のようになる．

$$f_x(x) = \frac{1}{B(q,r)}\frac{(x-a)^{q-1}(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}} \qquad a \leqq x \leqq b \qquad (5)$$

ただし，q，r は分布のパラメータであり，分布の形状に影響を与えるものである．B(q，r)はβ関数(beta function)である，

$$B(q,r) = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)dx \qquad (6)$$

このβ分布の平均値と分散(variance)は，**式 (7)**，**式 (8)** のようになる．

$$\mu_x = a + \frac{q}{q+r}(b-a) \qquad (7)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{qr}{(q+r)^2(q+r+1)}(b-a)^2 \qquad (8)$$

標準偏差は分散から下式のように表される.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{qr}{(q+r)^2(q+r+1)}}(b-a) \tag{9}$$

また, 変数（上限値）の値が 0 と 1 の場合(a=0, b=1), **式(5)は下**式のようになる.

$$f_x(x) = \frac{1}{B(q,r)} x^{q-1}(1-x)^{r-1} \qquad 0 \leqq x \leqq 1 \tag{10}$$

この状態を標準β分布(standard beta distribution)という.

2. Excel を用いた3関数の表し方

Excel には, 上記に示した3分布のそれぞれについて関数が用意されている. そのエクセル関数を用いることで, それらの分布を容易に図化することができる.

(1) 正規分布

正規分布には, NORMDIST(x, mean value, standard deviation, flag)の関数があり, x は変数, mean value は平均値, standard deviation は標準偏差, flag は関数形式を表している. flag には true もしくは false のどちらかを指定する. true を指定した場合は正規分布の累積分布関数(cumulative distribution function), false を指定した場合は確率密度関数(probability density function)の値が得られる. 図1及び図2にμ=5 としσをパラメータとした確率密度関数及び累積密度関数, **図 3** 及び**図 4** にσ=1 としμをパラメータとした確率密度関数及び累積密度関数を示す.

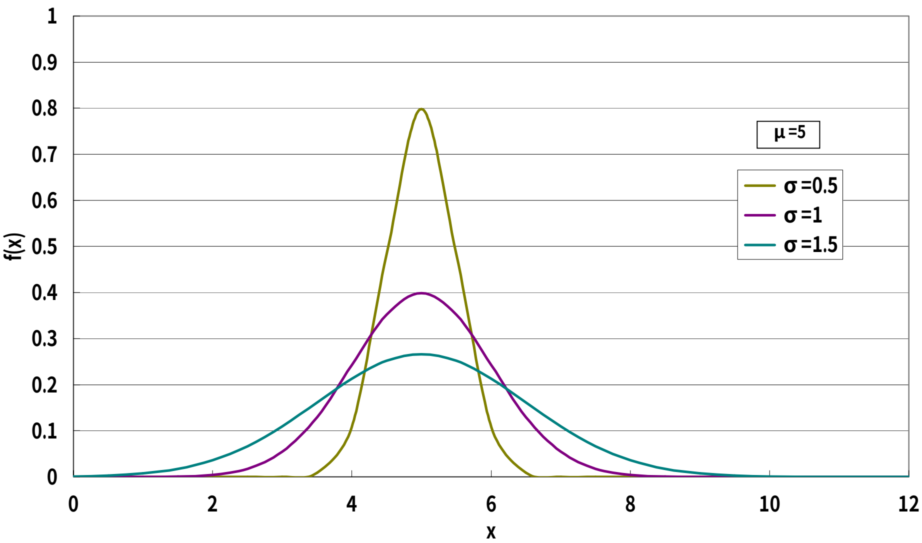

図1　μ を 5 とし σ をパラメータとした正規分布の確率密度関数

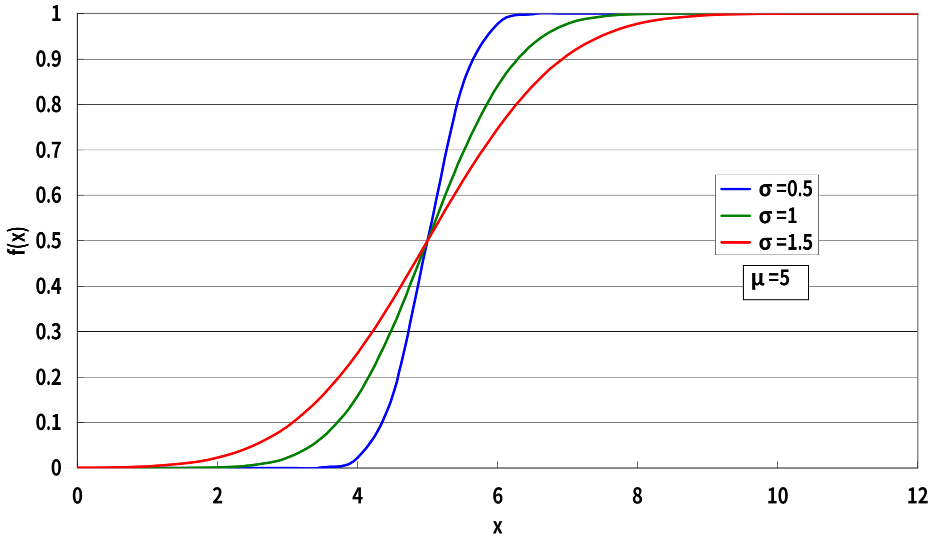

図 2　μ を 5 とし σ をパラメータとした正規分布の累積密度関数

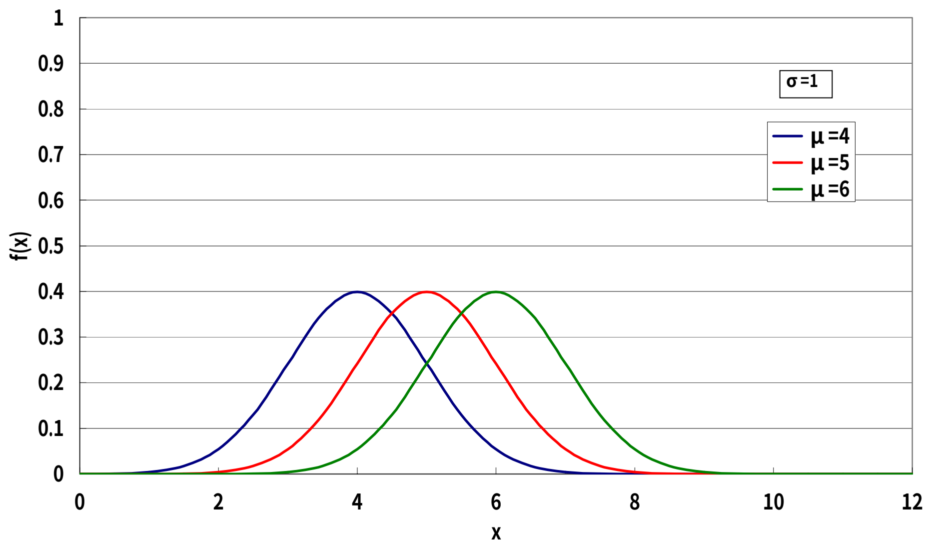

図３　σを１としμをパラメータとした正規分布の確率密度関数

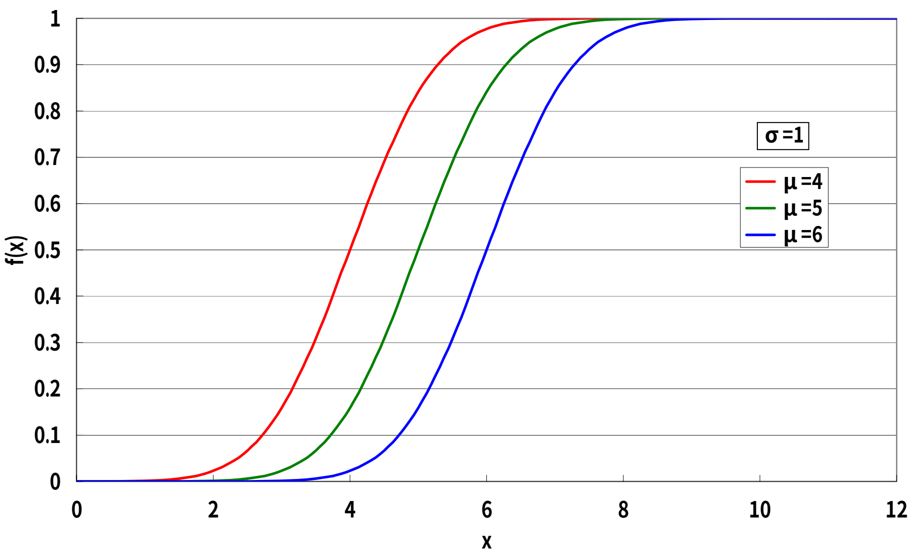

図４　σを１としμをパラメータとした正規分布の累積密度関数

⑵ 対数正規分布

対数正規分布には，LOGNORMDIST(x, logarithmic mean value, logarithmic standard deviation)の関数があり，x は変数，logarithmic mean value は対数平均λ，logarithmic standard deviation は対数標準偏差ξとなっている．この場合，対数正規分布の累積分布関数の値が得られる．さらに，対数正規分布は上記の NORMDIST 関数を使っても表すことができる．変数の x を lnX にすることで対数正規分布の値を得ることができる．図5及び図 6 にξ=0.4 としλをパラメータとした対数正規分布の確率密度関数及び累積密度関数，**図 7** 及び**図 8** にλ＝1 としξをパラメータとした対数正規分布の確率密度関数及び累積密度関数を示す．

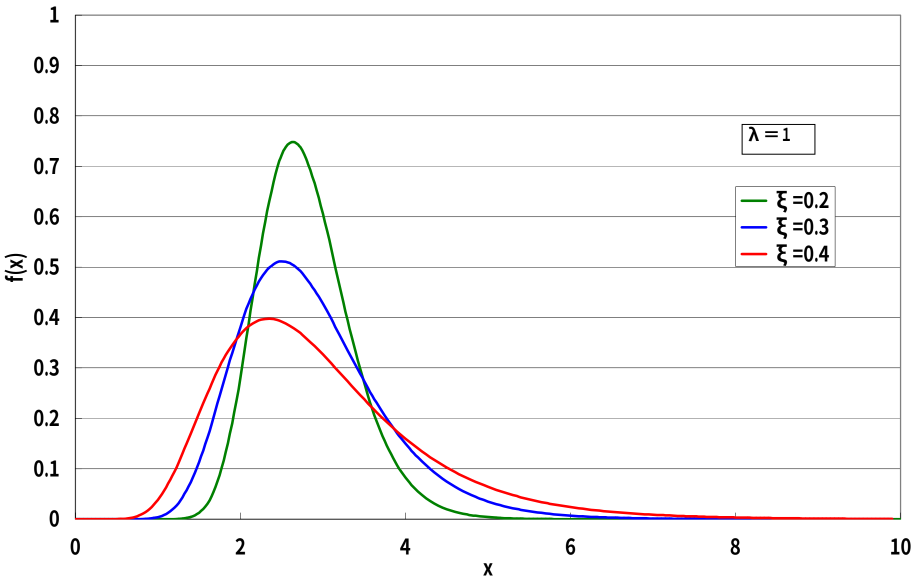

図 5　ζを 0.4 としλをパラメータとした対数正規分布の確率密度関数

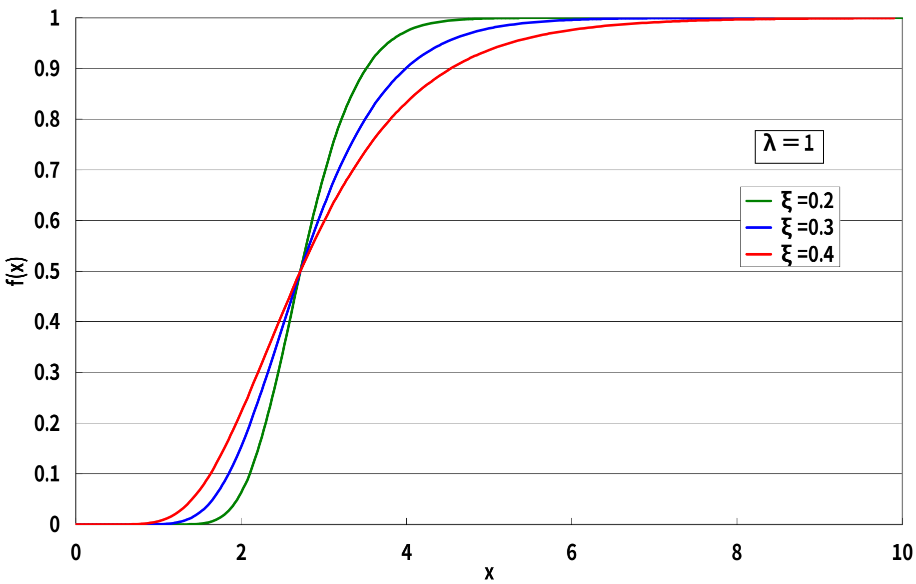

図 6　ζを 0.4 としλをパラメータとした対数正規分布の累積密度関数

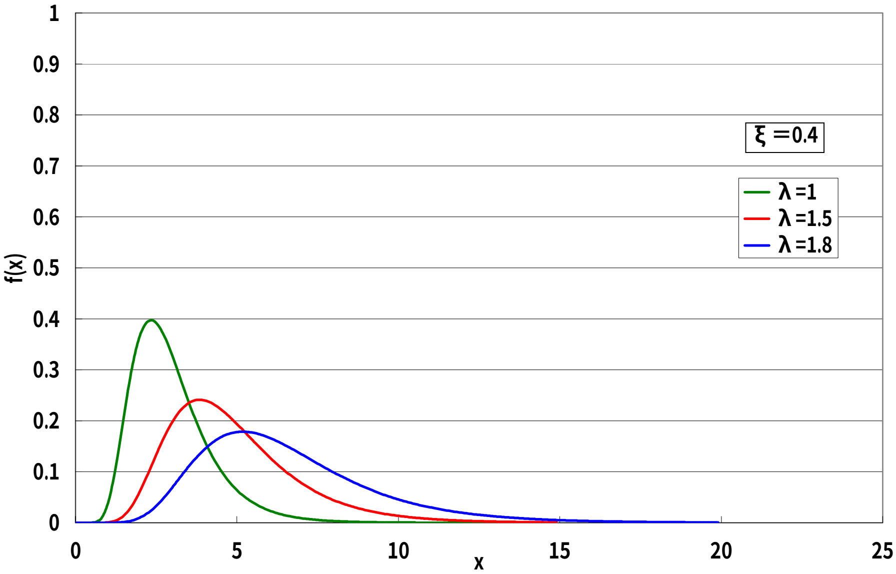

図 7　λを 1 としζをパラメータとした対数正規分布の確率密度関数

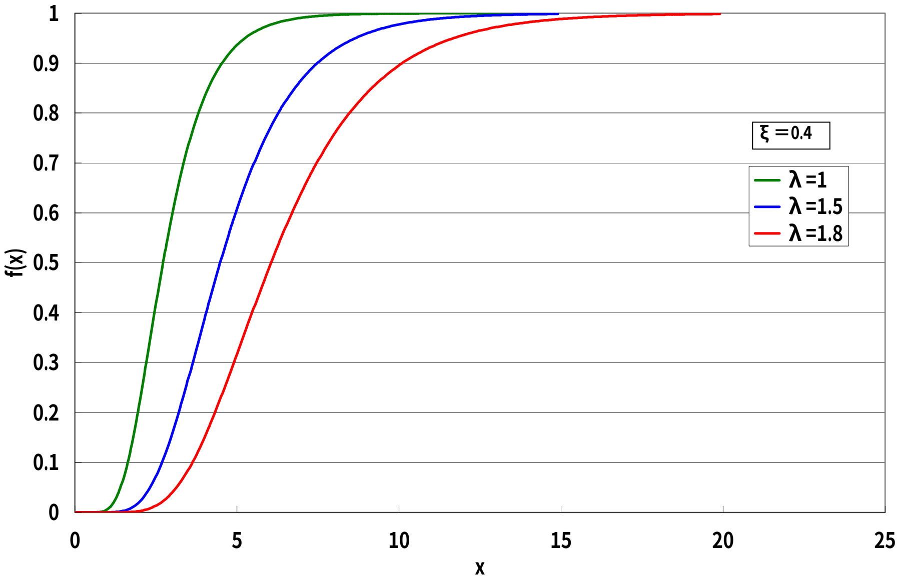

図 8　λを 1 としζをパラメータとした対数正規分布の累積密度関数

⑶ **β分布**(beta distribution)

β分布(beta distribution)には，BETADIST(x, q, r, a, b)の関数があり，x は変数，q 及び r は確率分布に対するパラメータ，A 及び B は変数 x の上下限値で，これら 2 つを指定しない場合は自動的に a=0,b=1 となる．つまり，a，b を省略すると標準β分布となる．その結果，β分布の累積密度関数値が得られる．**図 9** 及び**図 10** に a=2,b=12 として q,r をパラメータとした場合の確率密度関数及び累積密度関数，**図 11** 及び**図 12** に q=6,r=9 として a,b をパラメータとした場合の確率密度関数及び累積密度関数，**図 13** 及び**図 14** に a=0,b=1 として q=r≦1 で q=r をパラメータとした場合の確率密度関数及び累積密度関数，**図 15** 及び**図 16** に a=0,b=1 として q=r≧2 で q=r をパラメータとした場合の確率密度関数及び累積密度関数，**図 17～図 24** に a=0,b=1 として q,r をパラメータとした場合の確率密度関数及び累積密度関数をしめす．

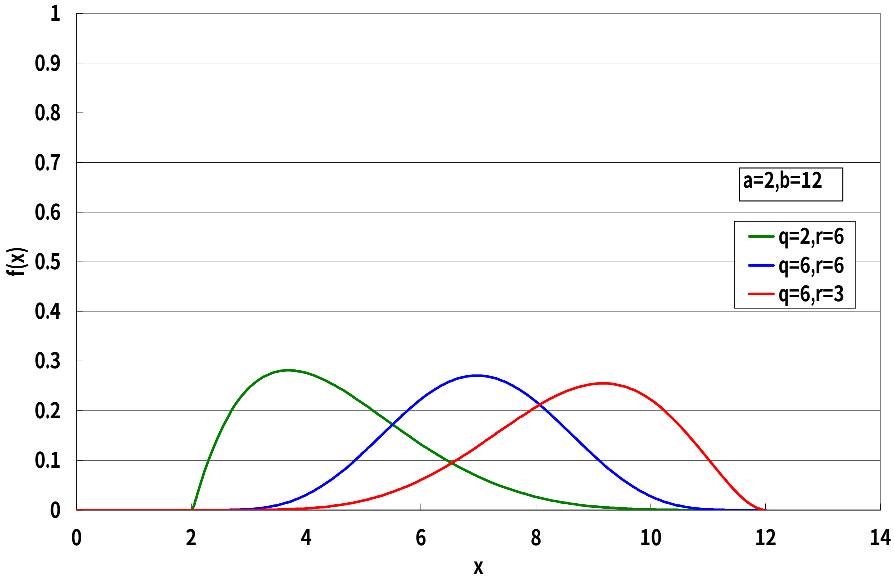

図 9　下限値を 2，上限値を 12 として q 及び r をパラメータとした場合の確率密度関数

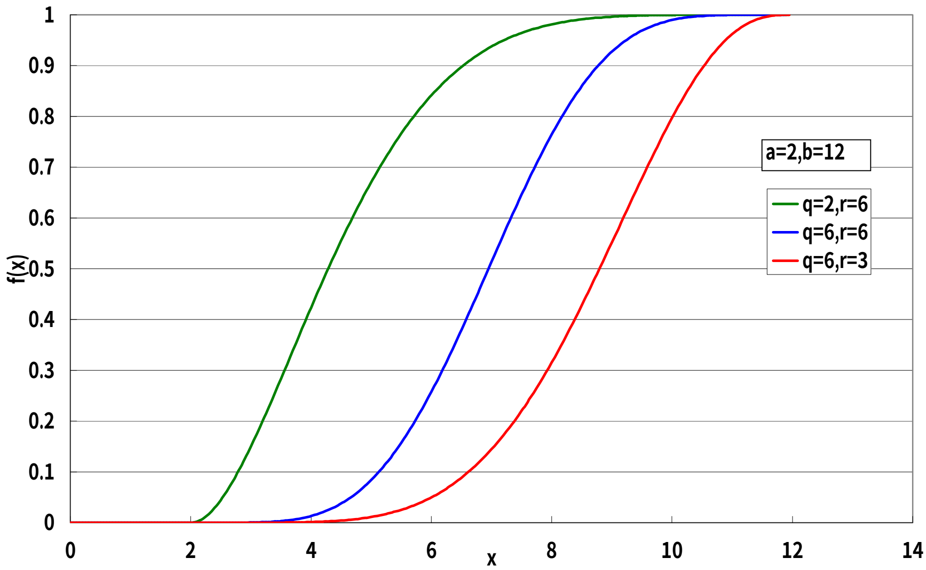

図 10　下限値を 2，上限値を 12 として q 及び r をパラメータとした場合の累積密度関数

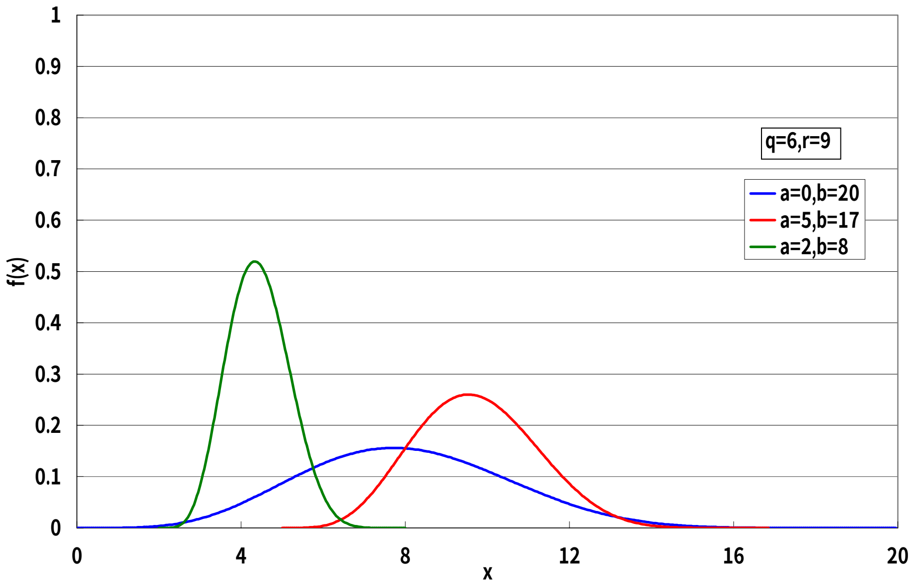

図 11　q を 6, r を 9 として上下限値をパラメータとした場合の確率密度関数

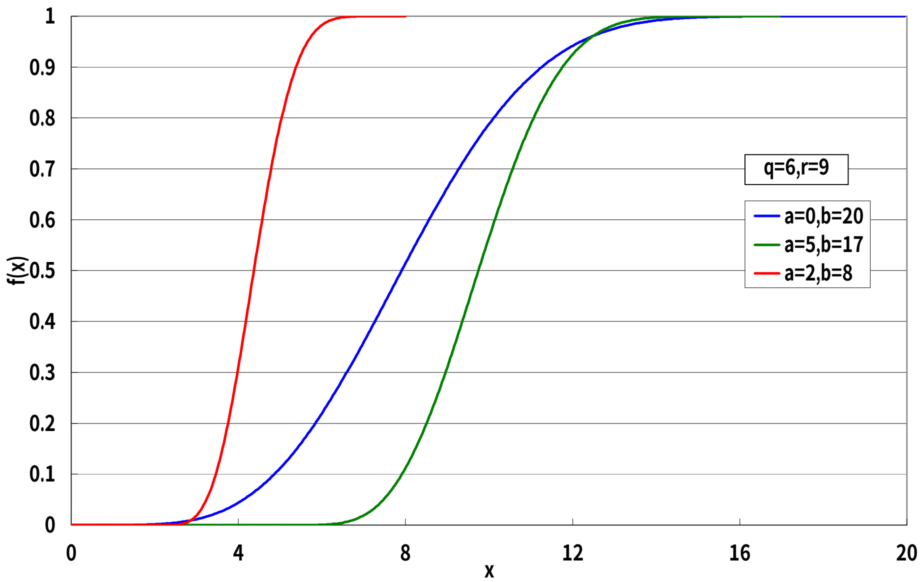

図 12　q を 6, r を 9 として上下限値をパラメータとした場合の累積密度関数

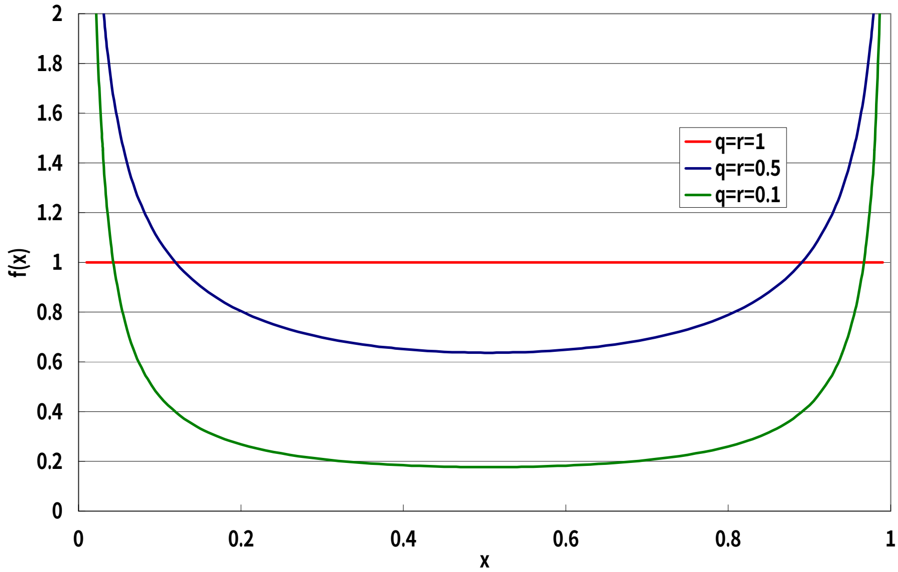

図 13　標準β分布で 0≦q＝r≦1の範囲でq＝rをパラメータとした場合の確率密度関数

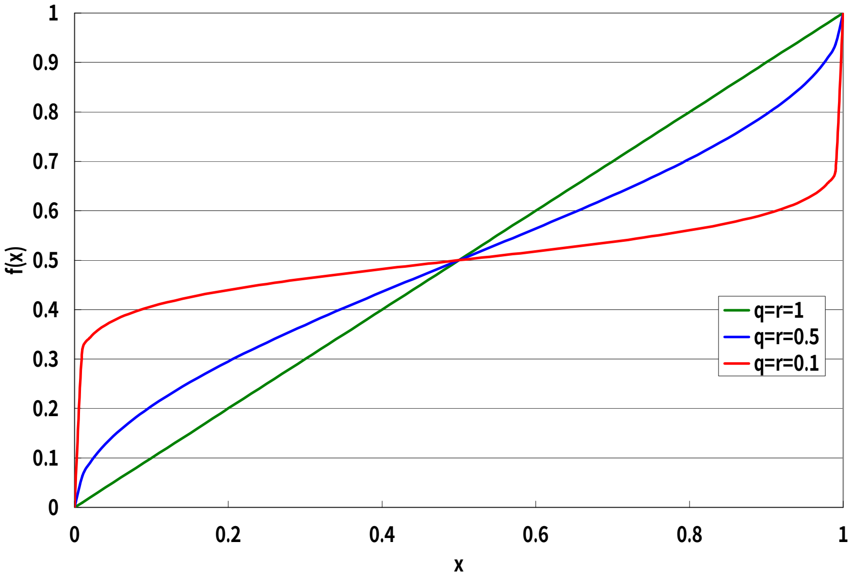

図 14　標準β分布で 0≦q＝r≦1の範囲でq＝rをパラメータとした場合の累積密度関数

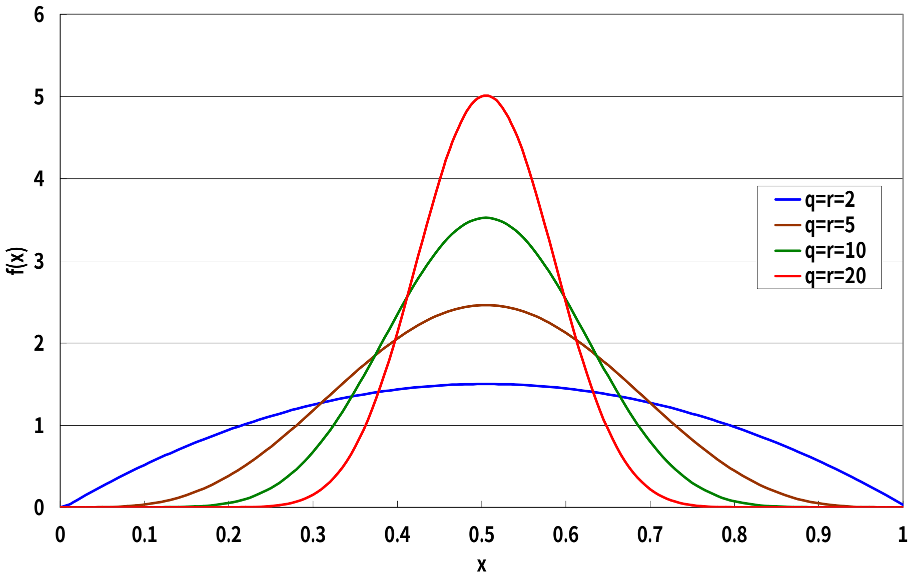

図 15　標準β分布で q = r≧2 の範囲で q = r をパラメータとした確率密度関数

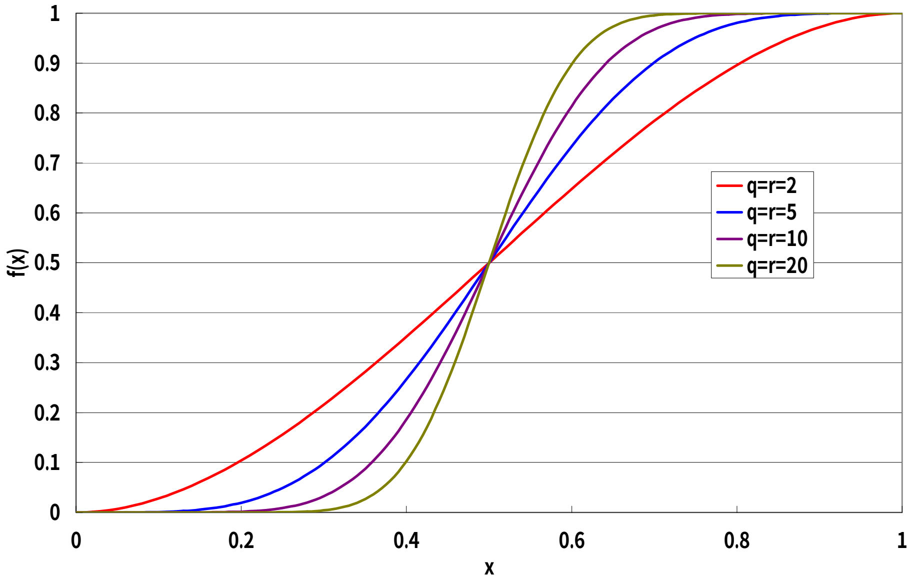

図 16　標準β分布で q = r≧2 の範囲で q = r をパラメータとした累積密度関数

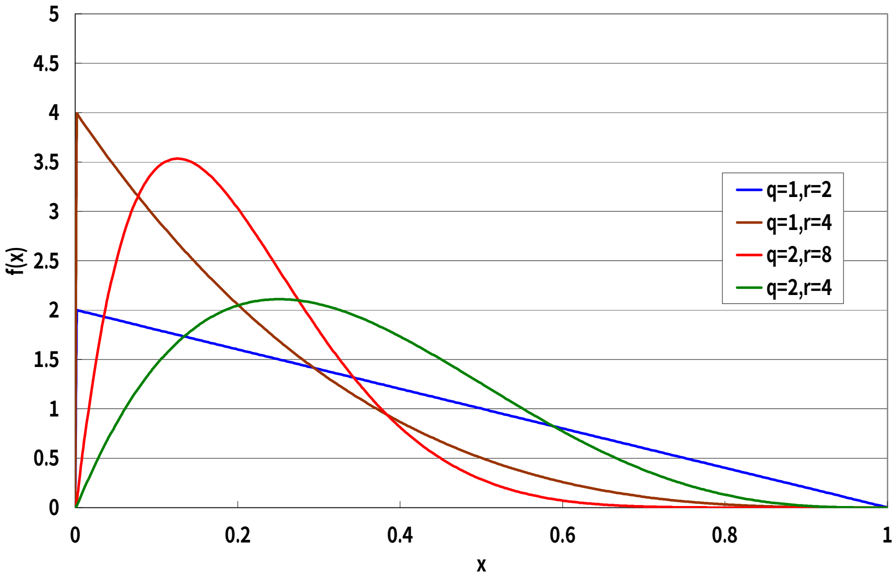

図 17 標準β分布で q 及び r をパラメータとした場合の確率密度関数

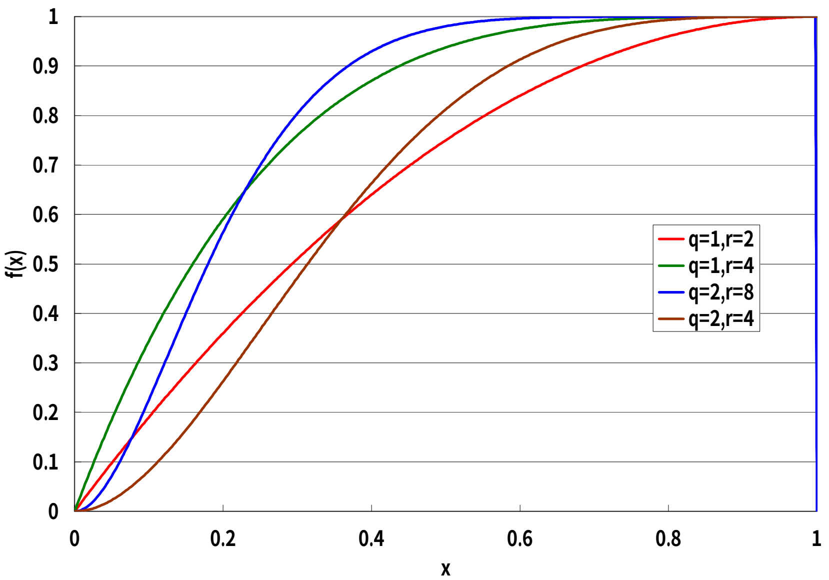

図 18 標準β分布で q 及び r をパラメータとした場合の累積密度関数

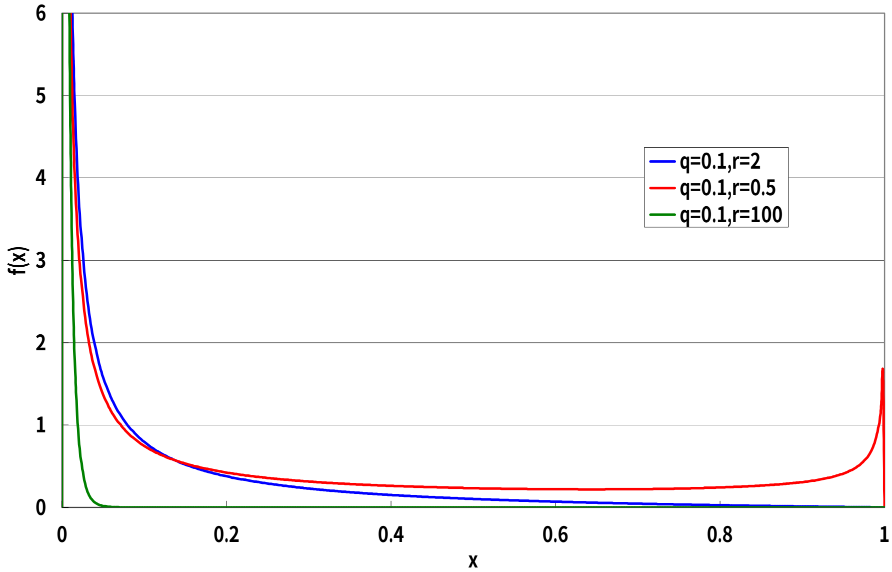

図 19 標準β分布で q 及び r をパラメータとした場合の確率密度関数

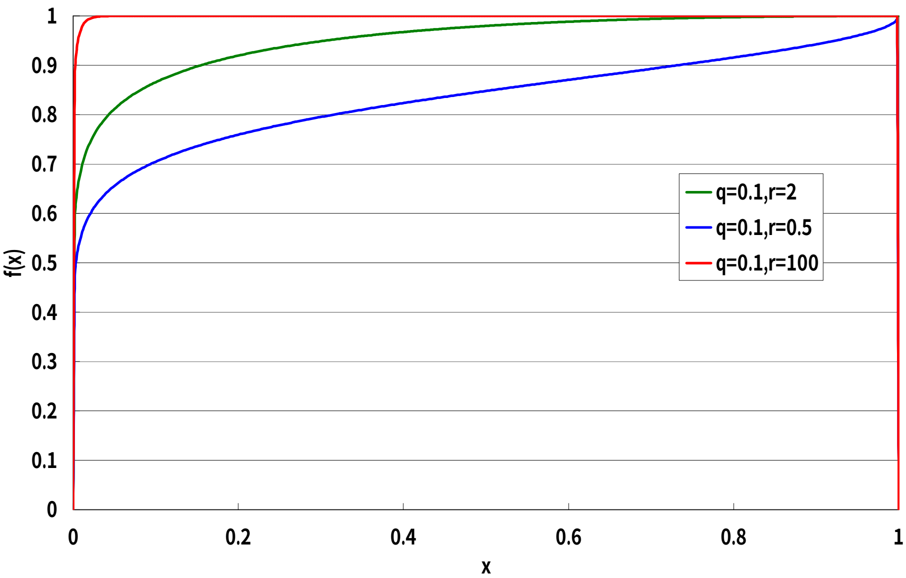

図 20 標準β分布で q 及び r をパラメータとした場合の累積密度関数

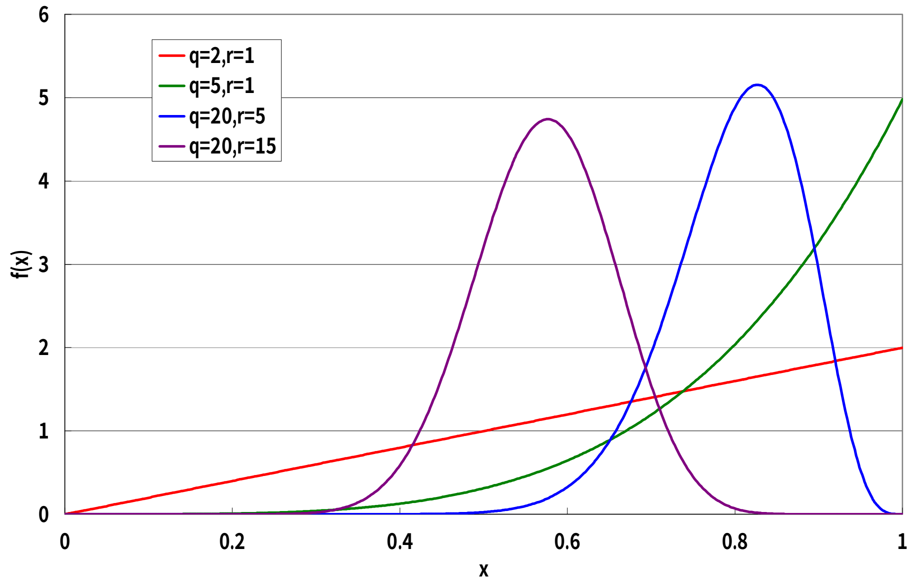

図 21 標準βの分布で q 及び r をパラメータとした場合の確率密度関数

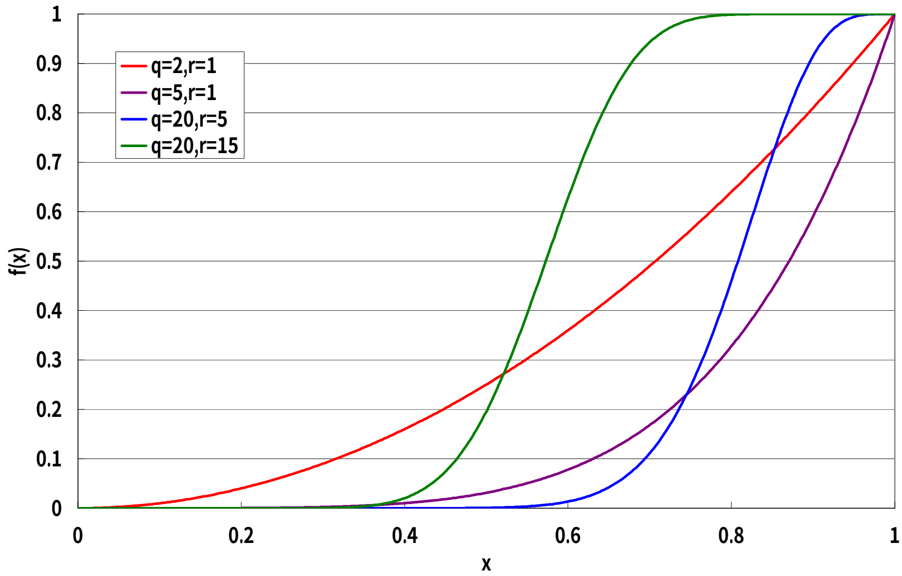

図 22 標準βの分布で q 及び r をパラメータとした場合の累積密度関数

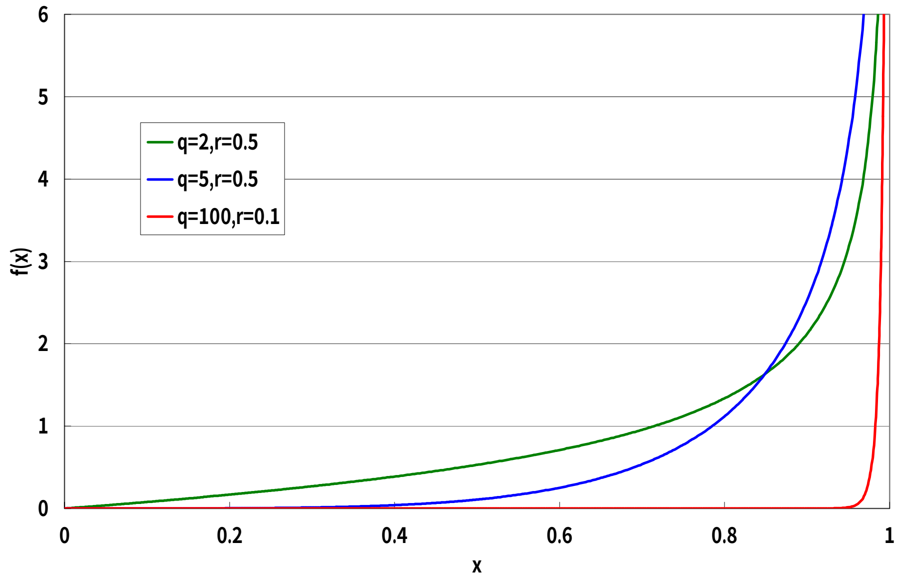

図 23 標準β分布で q 及び r をパラメータとした場合の確率密度関数

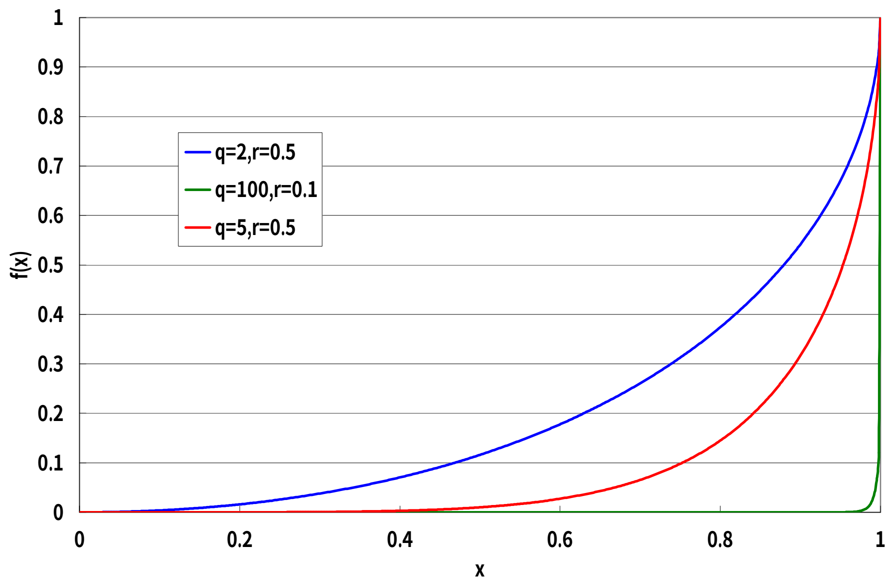

図 24 標準β分布で q 及び r をパラメータとした場合の累積密度関数