耐震設計プロジェクト

(2003/10/31)

第1講

耐震設計の中での動的解析の位置づけ
-動的解析法を理解する-

㈱ CRCソリューションズ

亀岡裕行

Ⅰ. 耐震設計の中での動的解析の位置づけ

1) 道路橋の耐震設計の流れ

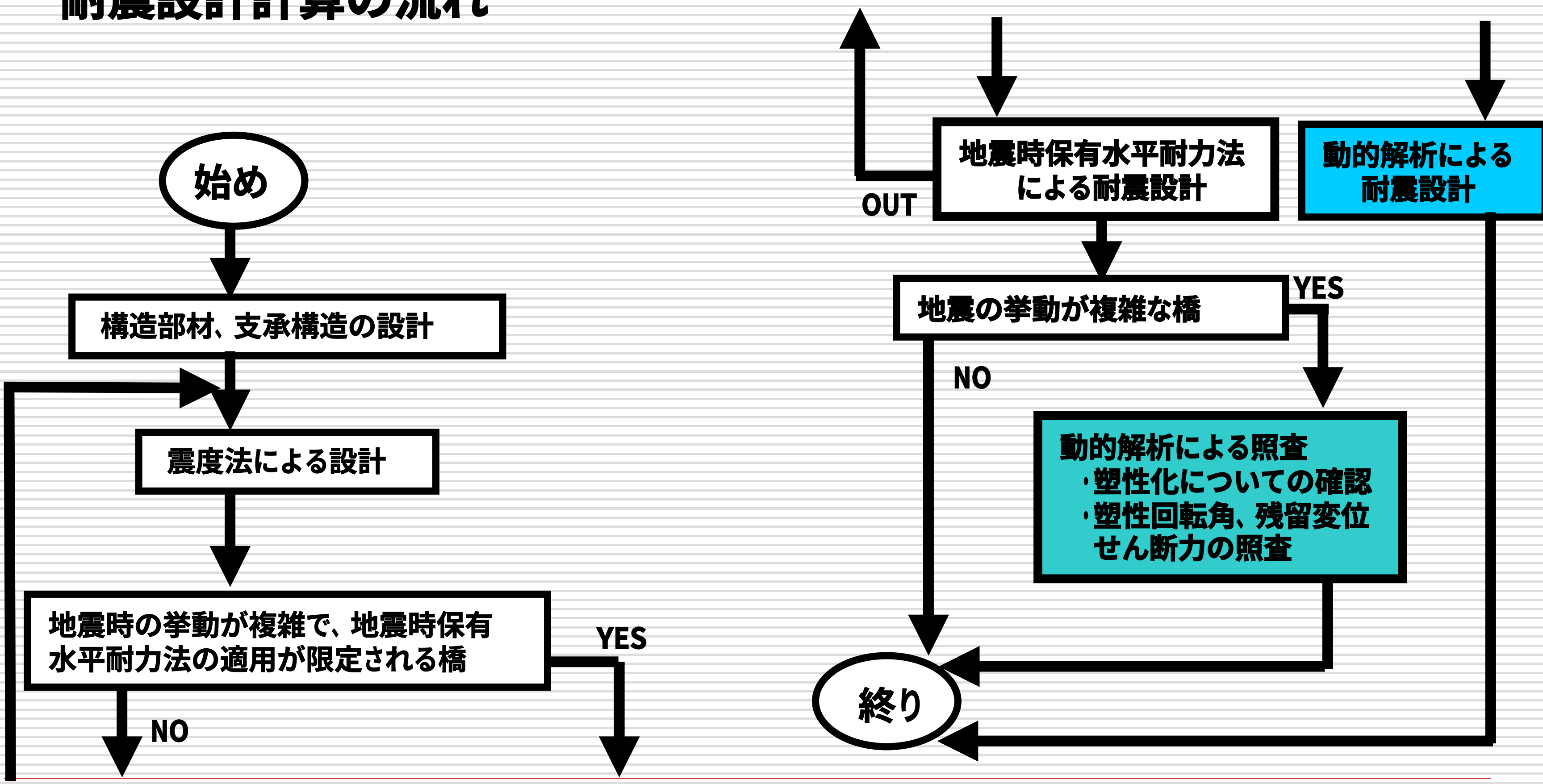
◆性能照査型への移行。

◆複雑な形状の橋梁（地震時の挙動が複雑）に対しては、動的解析法による耐震設計の重要性が高まる。

◆構造物の非線形性を評価。

＊平成１４年３月：道路橋示方書・同解説　Ⅴ耐震設計編
日本道路協会

耐震設計計算の流れ


始め
構造部材、支承構造の設計
震度法による設計
地震時の挙動が複雑で、地震時保有水平耐力法の適用が限定される橋
YES
NO
OUT
地震時保有水平耐力法による耐震設計
動的解析による耐震設計
地震の挙動が複雑な橋
YES
NO
動的解析による照査
・塑性化についての確認
・塑性回転角、残留変位せん断力の照査
終り

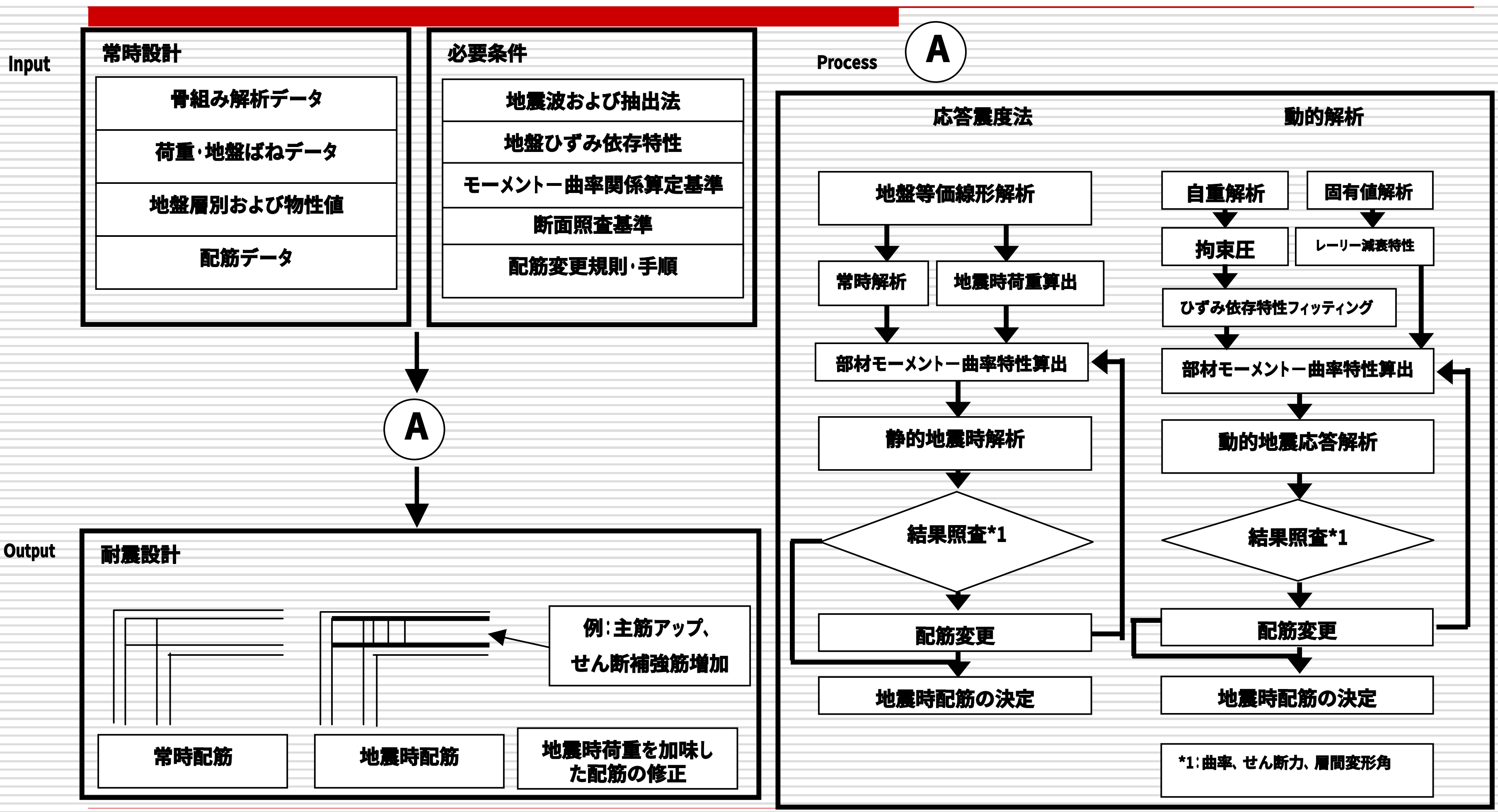
2) 地中構造物の耐震設計

◆非常に複雑な構造形式である。

◆地盤の非線形性の評価が必要。

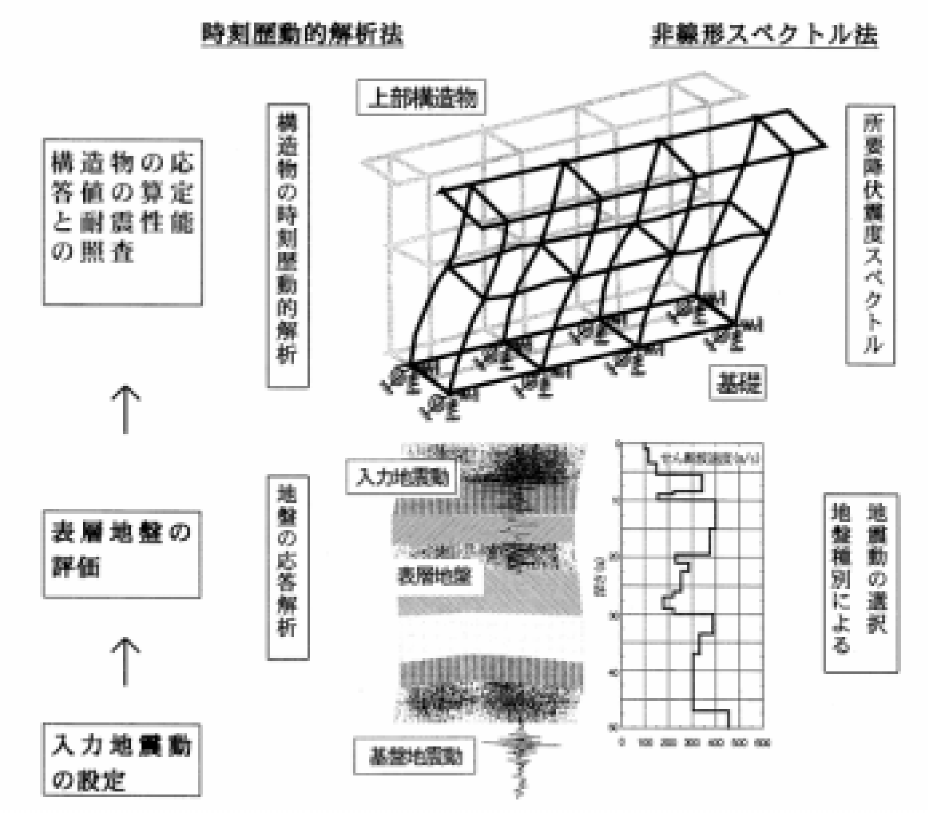
◆応答変位法、応答震度法以外に動的解析法の流れが強まる。

＊平成10年10月：開削トンネルの耐震設計　土木学会


Input
常時設計
骨組み解析データ
荷重・地盤ばねデータ
地盤層別および物性値
配筋データ
必要条件
地震波および抽出法
地盤ひずみ依存特性
モーメントー曲率関係算定基準
断面照査基準
配筋変更規則・手順
A
Output
耐震設計
例：主筋アップ、
せん断補強筋増加
常時配筋
地震時配筋
地震時荷重を加味した配筋の修正
Process
A
応答震度法
地盤等価線形解析
常時解析
地震時荷重算出
部材モーメントー曲率特性算出
静的地震時解析
結果照査*1
配筋変更
地震時配筋の決定
動的解析
自重解析
固有値解析
拘束圧
レーリー減衰特性
ひずみ依存特性フィッティング
部材モーメントー曲率特性算出
動的地震応答解析
結果照査*1
配筋変更
地震時配筋の決定
*1：曲率、せん断力、層間変形角

3) 鉄道施設の耐震設計
◆性能照査設計法
◆動的解析法を主体

＊平成11年10月：
鉄道構造物等設計標準・同解説
耐震設計
鉄道総合技術研究所



II. 動的解析法の内容

(1) 振動(震動)の基礎知識
(2) 周期特性の意味(自由振動を理解する)
(3) 減衰の意味と評価方法(減衰振動を理解する)
(4) 強制外力による運動方程式(強制振動を理解する)
(5) 1自由度系と多自由度系(多自由度系の地震外力による運動方程式を理解する)
(6) モードの考え方と多自由度系におけるモード解析法(モードの概念を理解する)
(7) 時間領域の数値解析法(逐次近似法を理解する)
(8) 非線形解析法(非線形解析アルゴリズムを理解する)

（1）振動（震動）の基礎知識

- 振動とは

　地震によって構造物がゆれるように、“物体がある位置を中心として運動を繰り返す”状態をいう。

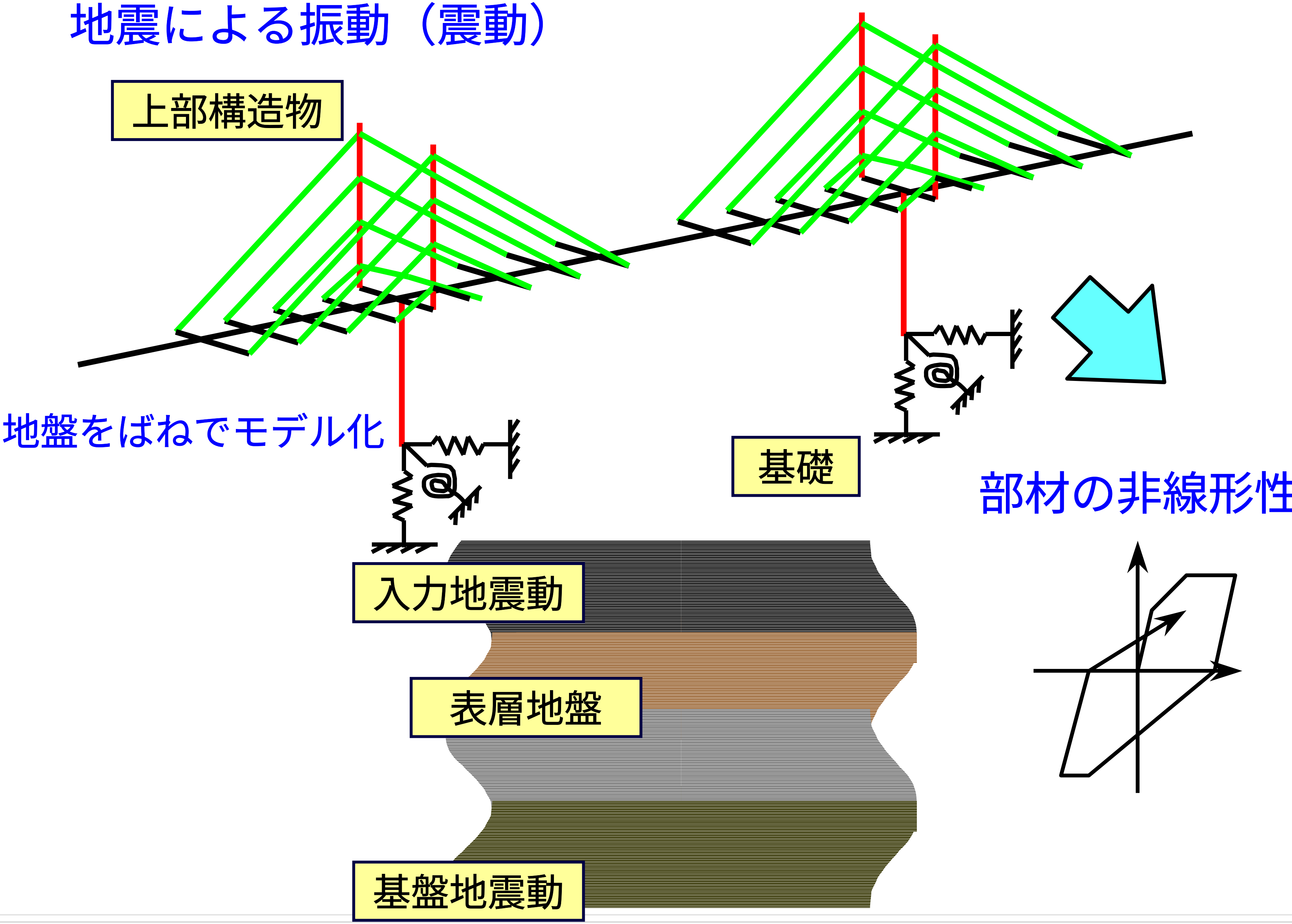
　土木・建築における工学的問題として以下が挙げられる

◆地震によって生じる構造物の振動（震動）

◆高架橋を走行する自動車によって発生する橋梁・地盤の振動

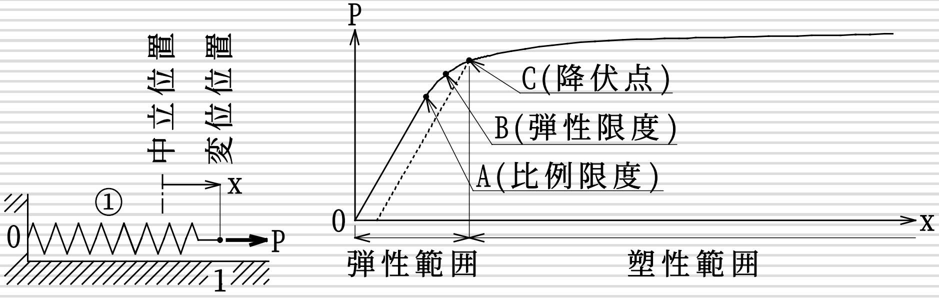
◆風によって生じる吊橋等の振動

地震による振動（震動）



剛性と復元力

土木･建築の構造材料として鉄筋、コンクリート、鋼材が挙げられる。それらの要素（部材）は、下図に示すように、軸方向･曲げ方向をそれぞれのばねで表現すると、荷重Pと変位xの関係は材料によって異なる。

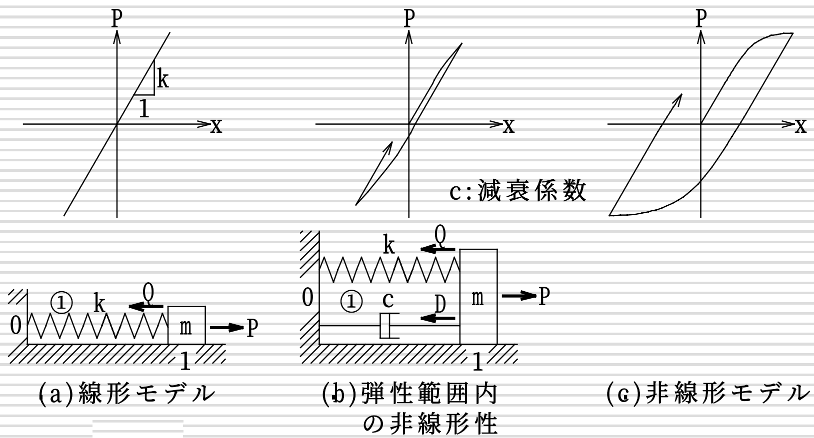


(a)バネ　(b)構造材料の荷重・変位関係

バネの荷重・変位関係

- **剛性と復元力（続き）**

下図（a）に示すような、Pとxが線形関係にある系を考える。



バネの荷重・変位関係のモデル化

そのとき、要素内に内力Qが生じる。Qは節点を中立位置に戻そうとする力で、復元力といい、下式を満足する。

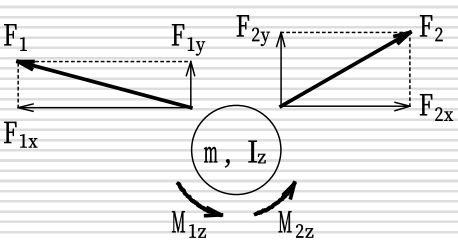
$$Q = kx$$

kは要素の加重に対する"変位のしにくさの程度"を表す剛性（剛さ）と呼ばれる。

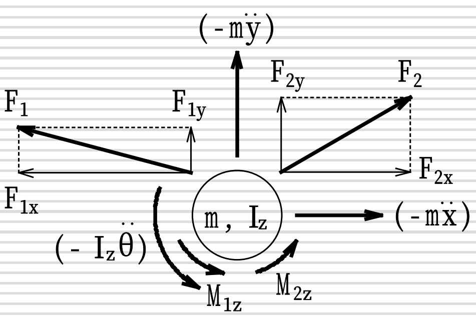
動的な釣り合い

複雑の構造系であっても、各質点（質量をもつ節点）の運動はそれぞれ下式のニュートンの運動法則が支配しているため、動的な力の釣合いがとれている。

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_{1x} + F_{2x} = \sum F_x \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_{1y} + F_{2y} = \sum F_y \\ I_z\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = M_{1z} + M_{2z} = \sum M_z \end{cases}$$



質点に作用する力



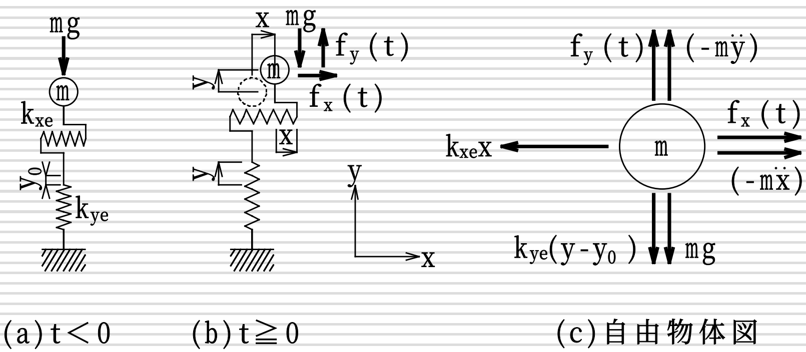
自由物体図

ここで、d^2x/dt^2とd^2y/dt^2はそれぞれx方向とy方向の加速度成分であり、$d^2\theta/dt^2$はz軸まわりの角加速度成分である。$(F_{1x}$、$F_{1y})$と　$(F_{2x}$、$F_{2y})$はそれぞれF_1とF_2の(x方向、y方向)の成分である。

慣性力とは、質点質量に加速度（回転の場合は、慣性モーメントに角加速度）を掛けたものである。

運動方程式の構築

下図に示す1節点のばねマスモデルを考える。



運動方程式の構築

時刻t＜0においては、重力だけが作用し、t≧0で地震のような外力が作用したとする。t≧0における運動方程式を構築する。水平せん断ばねと鉛直ばねには、それぞれ水平力と鉛直力が作用する。

重力による鉛直ばねの縮みをy_0とすると

$$mg = k_{ye} y_0$$

となる。水平方向の変位をx、鉛直方向に重力だけが作用した状態に対する変位をyとする。

運動方程式の構築（続き）

自由物体図を上図に示すが、x方向には外力・慣性力・復元力、y方向には重力・外力・慣性力・復元力が作用している。

動的な力の釣合いから、x方向の運動方程式は下式になり、

$$\left(-m\ddot{x}\right)-k_{xe}x+f_x\left(t\right)=0, \qquad \therefore \quad m\ddot{x}+k_{xe}x-f\left(t\right)=0$$

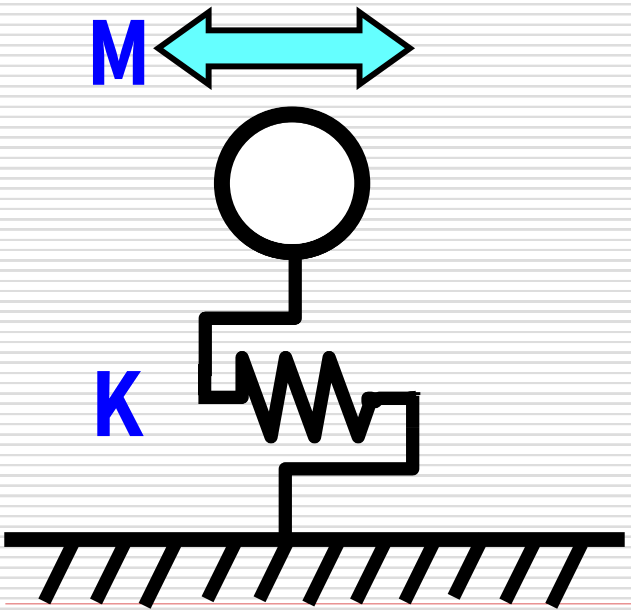
y方向の運動方程式は下式になる。したがって重力は振動には影響を及ぼさない。

$$m\ddot{y}+k_{ye}y-f\left(t\right)=0$$

(2) 周期特性の意味 (自由振動を理解する)

- 固有周期が長い、短いとは？

  外力が作用していない状態の振動を自由振動という。その周期は、非減衰の系の質量ｍと剛性kの比で決まり固有周期T (その逆数が固有振動数f) と呼ばれ、系の振動特性を表す重要な量である。



固有周期(sec)

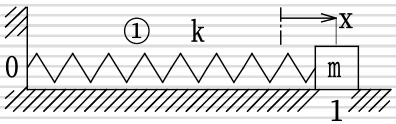
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

固有振動数(Hz)

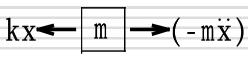
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$$

□ 固有周期が長い、短いとは？（続き）

下図に示す系の動的な釣合い式は下式で示される。



(a)解析モデル



(b)自由物体図

非減衰自由振動

$$m\ddot{x}+kx=0$$

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0,\qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

その一般解は下式で与えられ、

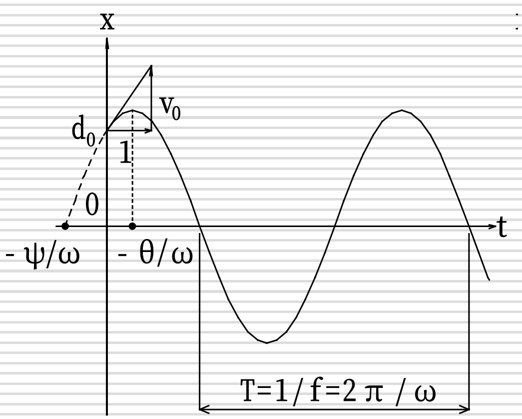
$$x=a_1\cos\omega t+a_2\sin\omega t$$

特殊解（t＝0**の変位、速度の初期条件**）**は下式で示され、調和振動として右図のように表される。**

$$x=A\left(\sin\psi\cos\omega t+\cos\psi\sin\omega t\right)$$

$$\therefore\quad x=A\sin\left(\omega t+\psi\right)$$

A**は振幅、**sin**の中を位相、ω を固有円振動数、φ を初期位相と呼ぶ。**

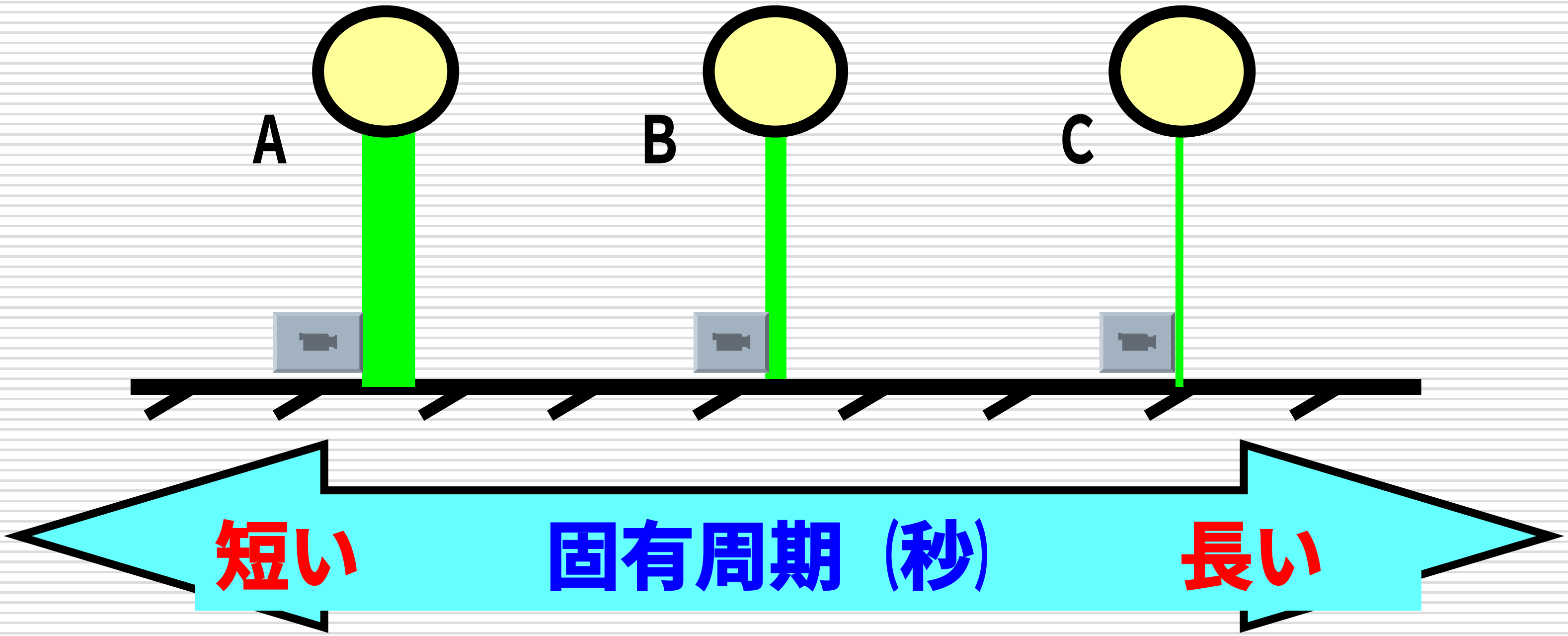


(a)非減衰自由振動

調和振動

□ 固有周期が長い、短いとは？（続き）

同じ質量で剛性が違う要素



(3) 減衰の意味と評価方法（減衰振動を理解する）

- 減衰機構の要因
  - ◆周囲の媒体によるもの。
  - ◆要素の内部摩擦によるもの。
  - ◆要素どうし、材料の違う他の要素との間に生じる個体摩擦によるもの。
  - ◆要素が変形を起こすためのエネルギー（ひずみエネルギー）の消耗によるもの。
  - ◆質点が動くエネルギー（運動エネルギー）の一部が減衰エネルギーとして消滅することによるもの。
  - ◆支持地盤への弾性波としてのエネルギー逸散によるもの。

減衰自由振動

実際の構造物は振動エネルギーを消費させる減衰エネルギーが存在する。1質点系の減衰力では、速度に比例と仮定する粘性減衰で評価することが多い。cを減衰係数と呼ぶ。

動的な釣合いから、減衰自由振動の運動方程式は下式で示される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

式を変換して下式が得られ、hを減衰定数（あるいは臨界減衰比）と呼ぶ。

$$h = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

□ 減衰自由振動（続き）

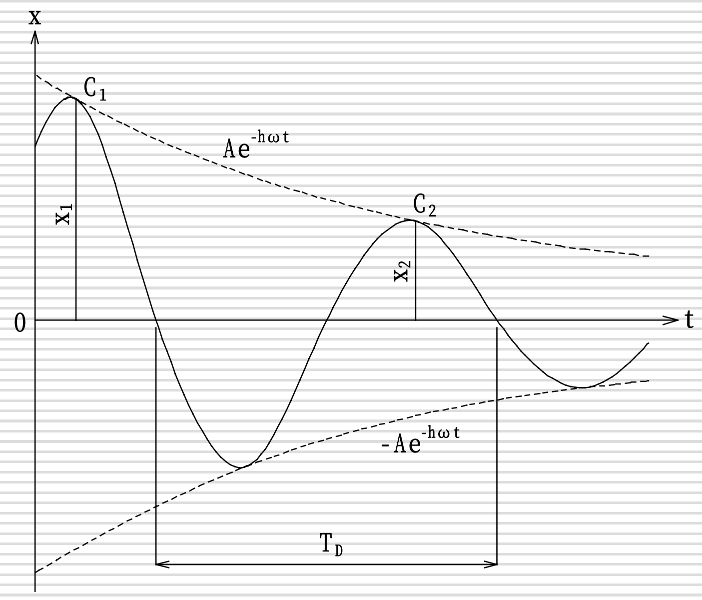
減衰自由振動の周期Tdは下式で示され、非減衰自由振動の周期より若干長くなる。

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{Ae^{-h\omega t_1}}{Ae^{-h\omega(t_1+T_D)}} = h\omega T_D, \qquad \therefore \quad T_D = \frac{\delta}{h\omega}$$

減衰自由振動の時間に対する振幅履歴を右図に示す。

振幅が減少する割合は一定であり、対数減衰率δで表される。またδと減衰定数hの関係は下式で表されるため、連続する変位の減少率を測定すれば、その系の減衰定数を求めることが出来る。

$$h = \frac{\delta}{2\pi}$$



減衰自由振動

(4) 強制外力による運動方程式 (強制振動を理解する)

- **調和外力による減衰強制振動**

外力が調和的であると、運動方程式は下式で示される。

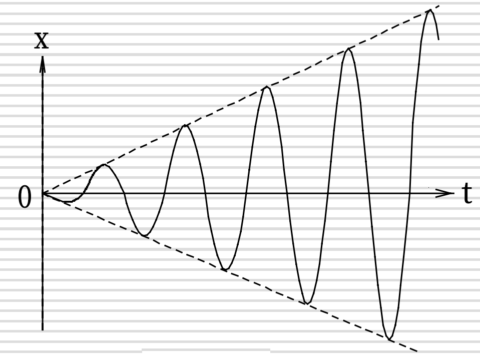
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin pt$$

その特殊解は下式で示され、過渡的な項 (系の固有振動数で振動する項) と強制振動の項 (調和外力の円振動数で振動する項) とに分解できる。

$$x = \underbrace{e^{-h\omega t}\left(a_1 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t\right)}_{\text{過渡応答}} + \underbrace{A_p \sin\left(pt + \theta\right)}_{\text{定常応答}}$$

- **調和外力による減衰強制振動(続き)**

  下図に示すように、外力の円振動数pが固有振動数ωに限りなく近づくと、変位xが時間とともに発散していく。実際は減衰があるために無限大には発散しないが、かなり大きくなる。p＝ωの場合を共振点という。



共振

共振曲線

振動数比 (r＝p/ω) を横軸にとり、動的応答倍率 (定常変位応答振幅/強制変位振幅) を縦軸にとったものが、右図に示す共振曲線と位相差である。

動的応答倍率を下式に示すが、減衰の大きさによって変わることがわかる。

$$D = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + 4h^2r^2}}$$

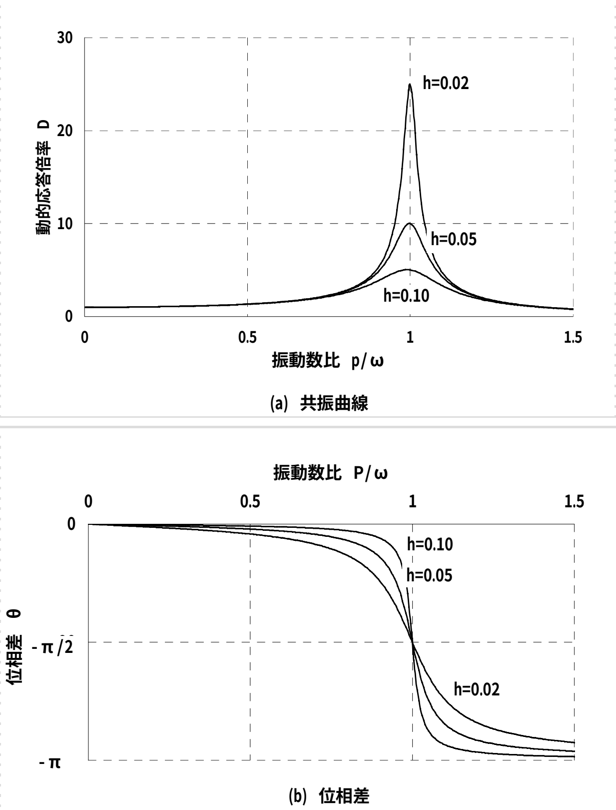
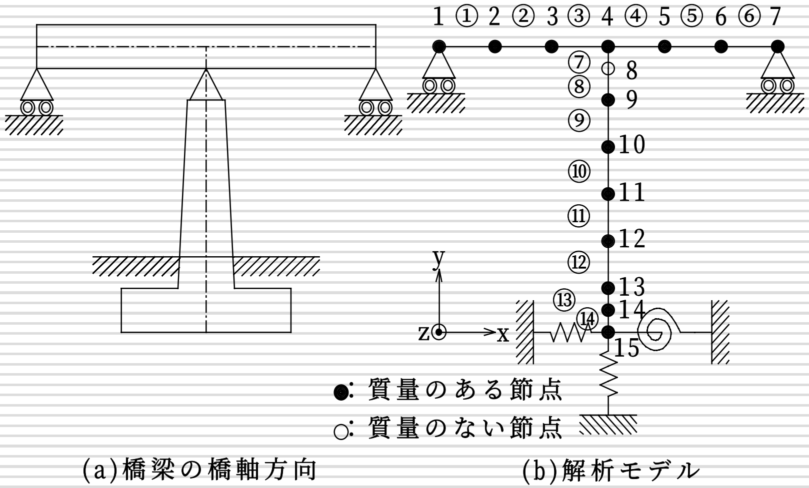


図3. 4 調和外力に対する定常振動の動的応答倍率と位相差

(5) 1自由度系と多自由度系 (多自由度系の地震外力による運動方程式を理解する)

- 動的解析モデル

  動的解析モデルは、右図に示すように、構造系を質量をもつ節点と要素で構成されるフレームモデル (骨組み系モデル、質点系モデル、ばねマスモデルとも呼ばれる) を使用される。このモデルの特徴としては、例えば連続体モデルで使用される有限要素法 (FEM)と比べ、簡易なモデルでありながら現象をよく把握でき、かつ経済性がある。



(a)橋梁の橋軸方向　(b)解析モデル

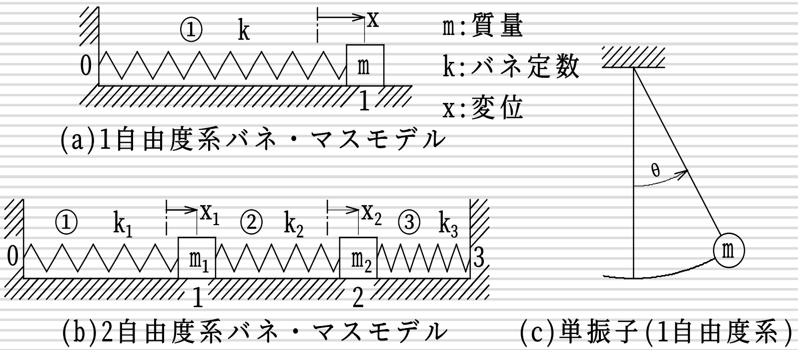
動的解析のためのモデル化

自由度

　自由度は振動学における重要な概念の一つである。

"時刻tにおける振動形状が、n個の独立変数（節点の変位）によって完全に決まる場合、そのモデルはn個の自由度を持つといい、n自由度系であるという"

　例えば、1自由度、2自由度は下図に示すようなモデルであり、2自由度以上の系を多自由度系という。

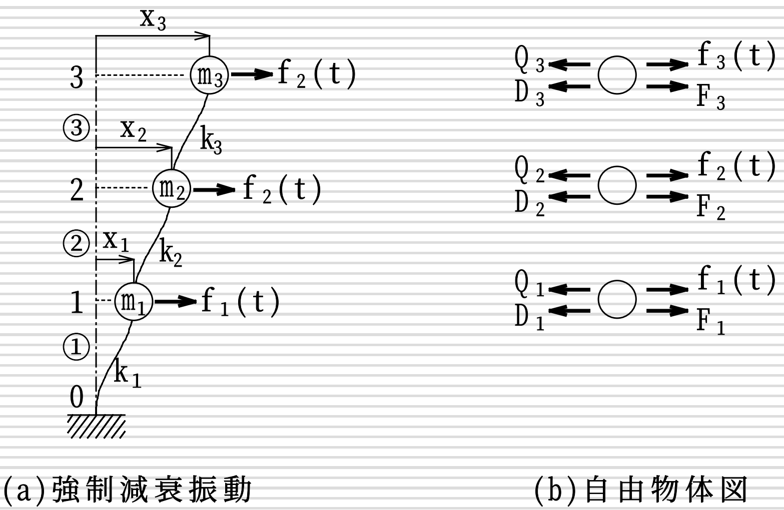


系の自由度

□ 多自由度系の運動方程式

　右図に示す3自由度のフレームモデルを考える。

　変位，外力，慣性力，復元力と減衰力の関係は，以下のとおりである。



3自由度のせん断建物モデル

多自由度系の運動方程式（続き）

$$\underbrace{[M]\{\ddot{x}\}}_{\text{慣性力}}+\underbrace{[C]\{\dot{x}\}}_{\text{減衰力}}+\underbrace{[K]\{x\}}_{\text{復元力}}=\underbrace{\{f\}}_{\text{外力}}$$

ここに、 $\ddot{x}$ **：加速度、** $\dot{x}$ **速度、** x **：変位**

M **：質量、** C **：減衰、** K **：剛性**

f **：外力**

□ 地震外力の運動方程式

　地震の場合は、系の拘束節点は地盤に固定されている。地震による地盤の絶対加速度を　とし、拘束節点の地盤に対する相対変位、相対速度をそれぞれ　、　とするときの運動方程式は下式で示される。

$$\left[M\right]\left\{\ddot{x}\right\}+\left[C\right]\left\{\dot{x}\right\}+\left[K\right]\left\{x\right\}=-\left[M\right]\left\{1\right\}\ddot{x}_g$$

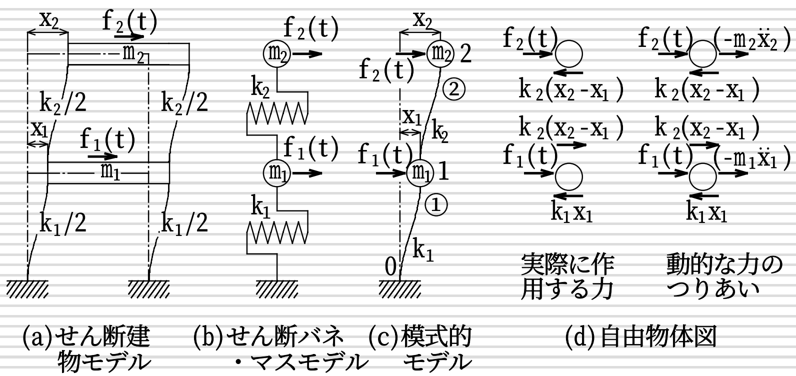
　動的解析を行う（運動方程式を解く）とは、予条件より得られる既知量である質量、減衰、剛性、地盤加速度から、未知量である加速度、速度、変位を求めることである。

6) モードの考え方と多自由度系におけるモード解析法 (モードの概念を理解する)

- **モード解析の概念**

　モード解析とは、多自由度系の運動方程式 (連立する微分方程式) を、連立しない方程式に変えて解く方法である。

　非減衰と仮定して右図に示す多自由度系せん断モデルを考える。



せん断建物モデル

　自由物体図には、各節点における力と加速度の関係すなわち運動方程式が下式で示される。

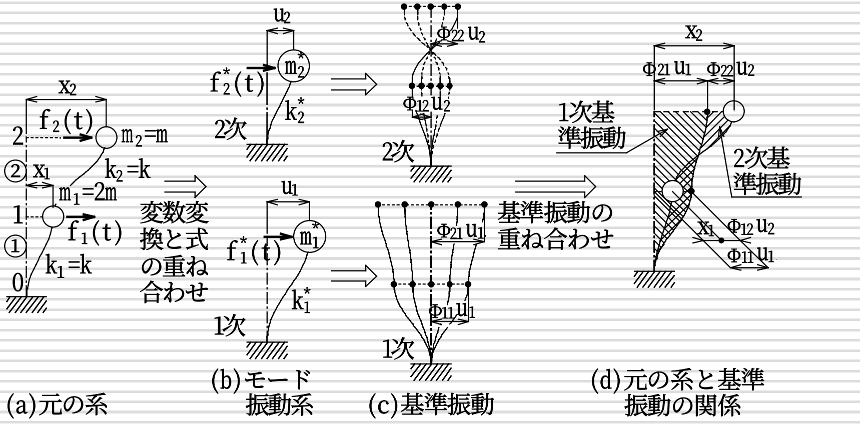
$$
\begin{cases}
m_1\ddot{x}_1 = f_1(t) - k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\
m_2\ddot{x}_2 = f_2(t) - k_2(x_2 - x_1)
\end{cases}
$$

すなわち、連立する微分方程式となる。

モード解析の概念 (続き)

連立しない微分方程式にするには、変数変換を行えば良い。通常、減衰力を含んだ連立微分方程式は一般には連成しない方程式に変えることができないため、慣性力と復元力を考慮した連立微分方程式を考える。

モード解析の概念図を右図に示す。



モード解析の概念図

□ モード解析で使われる重要な用語

◆基準座標とモード振動系

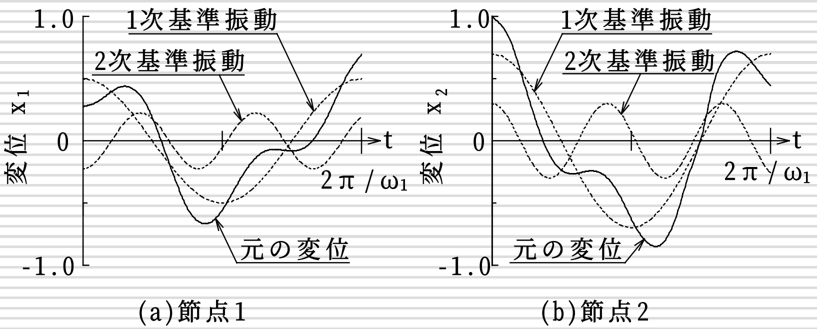
連立微分方程式を“変数変換と式の重ね合わせ”により連立しない方程式に変えたとき、その新しい変数による座標を基準座標（モード変換の場合はモード座標）と呼ぶ。また、これらの系をモード振動系と呼ぶ。

◆基準振動

元の系の変位を、以下に示すように、基準座標に対応する変位に分離して考えると、下式になる。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \underbrace{\phi_{11}u_1}_{} + \underbrace{\phi_{12}u_2}_{} \\
x_2 &= \underbrace{\phi_{21}u_1}_{\text{1次基準振動}} + \underbrace{\phi_{22}u_2}_{\text{2次基準振動}}
\end{aligned}
$$

それぞれの振動は常に一定な形状で振動し、互いに連成しない固有な振動系をもっている。下図に元の変位と基準振動の関係を示す。



元の変位と基準振動の関係

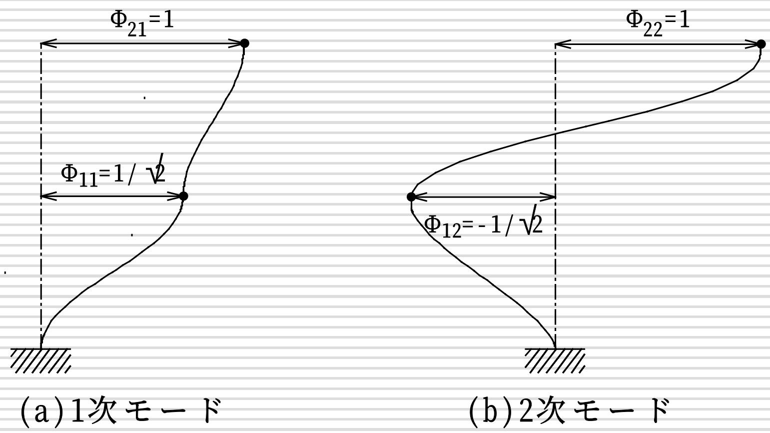
モード解析で使われる用語（続き）

◆モードベクトル

基準振動の振動系を表す下式の列ベクトルをモードベクトル（あるいは、モード形、モード）と呼ぶ。モードベクトルは比率だけ一定の条件で任意の値をとれるため、通常、各モードベクトルで正規化（最大を1）として、モード図を描く。

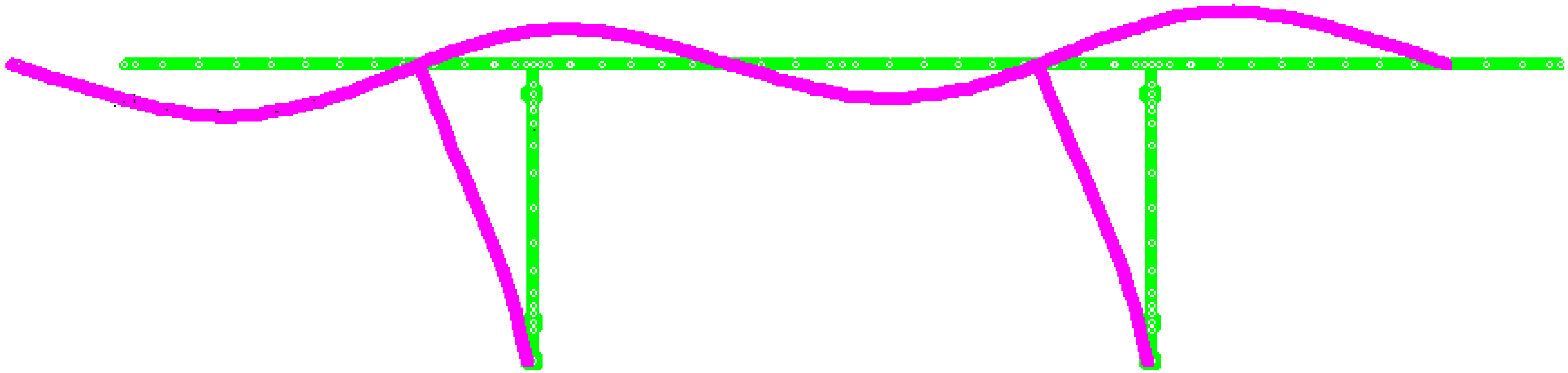
$$\left\{\Phi_{11},\Phi_{21}\right\}^t,\left\{\Phi_{12},\Phi_{22}\right\}^t$$

この基準振動の振動形を表しており、地震時に大きな応答が生じる基準振動の把握に用いられる。



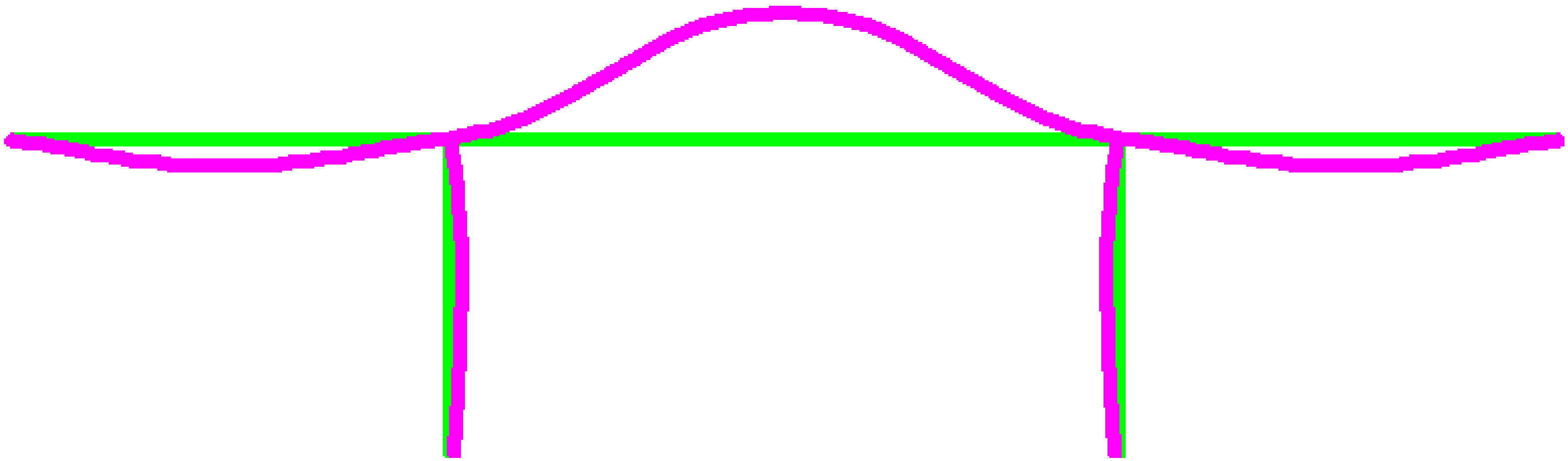
最大の成分を1としたモード図

1次固有振動モード（橋軸方向）



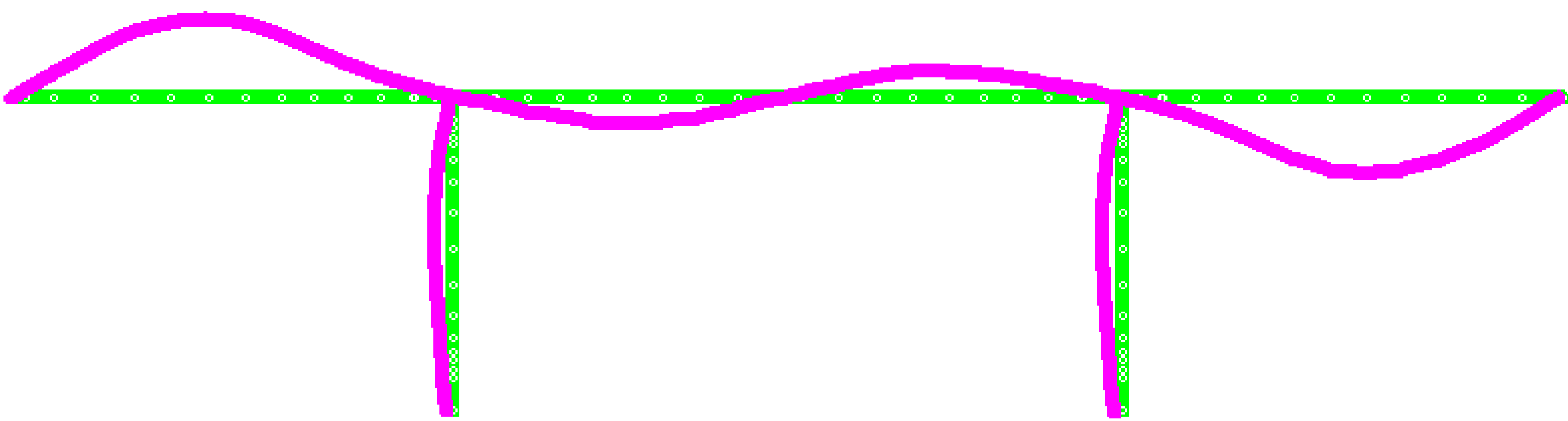
主要モード：橋脚の同位相のモード

2次固有振動モード（橋軸方向）



主要モード：中央径間の上部構造の鉛直モード

3次固有振動モード（橋軸方向）



主要モード：側径間の上部構造の鉛直モード

□ モード解析で使われる用語（続き）

◆固有値解析

元の系に対し、モードベクトルとモード振動系の固有円振動数（固有振動数、固有周期）を求めることを固有値解析という。この解析では、外力は関与しないで、非減衰自由振動を解くものである。

固有値解析により得られた下式の変数変換式により、連成しない微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} x_1 = \phi_{11} u_1 + \phi_{12} u_2 \\ x_2 = \phi_{21} u_1 + \phi_{22} u_2 \end{cases}$$

□ モード解析で使われる用語（続き）

◆一般化質量、一般化剛性、一般化力

多自由度系の連立微分方程式は連成しないモード振動系の運動方程式に変えることができるが、その連成しないモード振動系の質量、剛性、外力をそれぞれ、そのモードの一般化質量、一般化剛性、一般化力と呼ぶ。

◆刺激係数

地震による地盤振動に関する用語であり、刺激係数は元の系の地盤加速度に対するあるモード振動系の地盤加速度の倍率である。それが大きいことは、そのモード振動系が大きな地盤加速度を受けることを意味している。

◆有効質量（等価質量）

モード振動系における質量をいう。これも刺激係数と同様に、有効質量が大きな基準振動は元の系の大きな振動に寄与する。全モード振動系の有効質量の計が全質量となる。有効質量比は有効質量/全質量の比であり、モード解析における採用次数の選択の指標となる。

□ モード解析の流れ

(1)多自由度系の運動方程式の構築

要素を構成する部材の剛性により剛性マトリクスK、節点の質量（要素の質量を節点に分配）より質量マトリクスMを作成し、地盤振動の加速度の外力により、下式で示される多自由度系の運動方程式を構築する。

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=-[M]\{1\}\ddot{x}_g$$

(2)固有値問題によるモード振動系の

外力の無い自由振動の下式を固有値解析により、モード振動系のモードベクトル、固有振動数を求める。

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$$

□ モード解析の流れ（続き）

(3)モード減衰（モード毎の減衰定数）の作成

要素の弾性時の材料減衰より、どういう減衰機構がその系の減衰に影響があるのかを把握して、モード減衰定数を求める。道路橋では、要素が変形することによる減衰エネルギーが生じることを仮定するひずみエネルギー比例減衰を用いている。

(4)1自由度系の運動方程式の構築

固有値解析より得られた、一般化質量、一般化剛性、一般化力、そしてモード減衰定数により、モード毎の連成しない運動方程式（1自由度系の運動方程式）を求める。

$$\ddot{u} + 2h\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\beta\ddot{x}_g$$

□ モード解析の流れ（続き）

（5）各時刻の応答計算

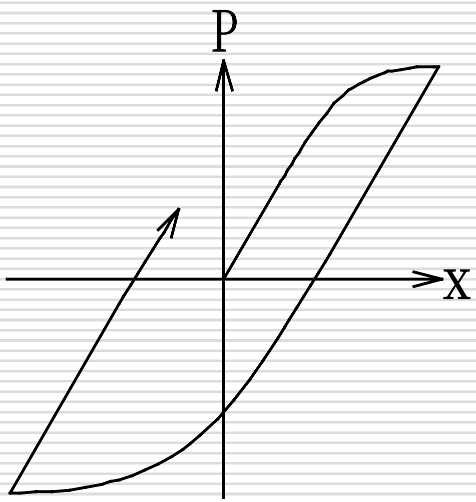
　数値解析法により、モード振動系の変位、速度、加速度を求め、基準振動の重ね合わせにより、元の系の変位、速度、加速度を求める。

(7) 時間領域の数値解析法 (逐次近似法を理解する)

- 逐次近似法による数値解析法

　1自由度系の微分方程式の解法はこれまで、厳密な解を求める方法 (陽解法) の一つであるデュアメル積分で行われていた。しかし、大地震のような大きな力が作用すると、下図に示すように復元力は変位に比例せず、変位の履歴に依存するようになる。

　したがって、多自由度系の運動方程式は非線形な連立微分方程式となるため、もはや厳密解を求めることは困難となり、逐次近似法 (陰解法) による近似解を求めることになる。



バネの荷重・変位関係のモデル化

加速度法による数値解析法

線形な1自由度系の減衰強制振動の運動方程式は下式で示される。

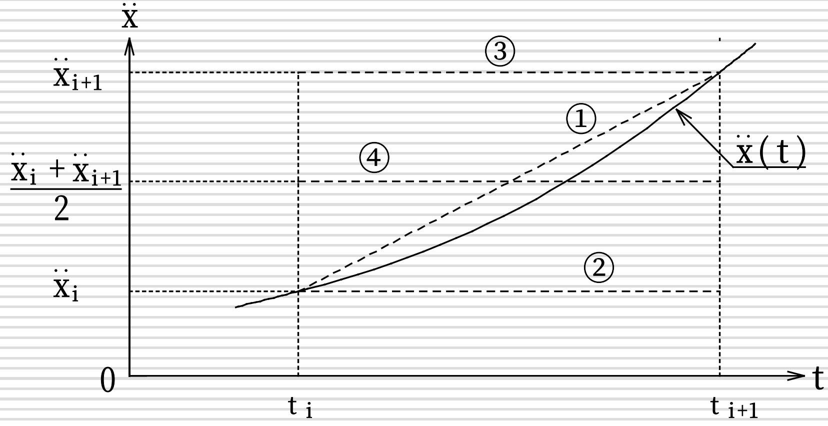
$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t) \qquad (t\geq 0)$$

初期条件すなわち時刻t＝0における変位と速度を与えて微分方程式を解く（初期値問題）。逐次近似法は既知となった初期値から、逐次振動状態の近似解を1ステップずつ求めていく方法である。

□ 加速度法による数値解析法（続き）

ただし、次ステップの振動状態を求めるため、仮定が必要であり、加速度法は、“時間間隔のあいだ加速度の変化の仕方を仮定する逐次近似法”である。

下図に線形加速度法①と平均加速度法④の仮定条件を示す。



加速度法の仮定

□ 加速度法による数値解析法（続き）

　よく使用されているニューマークβ法は、各種の加速度法をパラメータβで統合したもので、下式で示される。

$$\Delta\dot{x}_i = \ddot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2}\Delta\ddot{x}_i \Delta t$$

$$\Delta x_i = \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}_i \Delta t^2 + \beta\Delta\ddot{x}_i \Delta t^2$$

　すなわち、β＝1/6が線形加速度法であり、β＝1/4が平均加速度法になる。

- **加速度法による数値解析法（続き）**

　物理的な意味はなくなるが、1/6≦β≦1/2がβのとり得る範囲（ニューマークの推奨値）である。βの小さい方が計算精度が高いが、β＝1/6の場合、積分時間間隔Δtと系の最小固有周期T_{min}との比が1/1.8より大きいと発散するといわれている。したがって一般的には、β＝1/4にして計算精度を上げるため、積分時間間隔Δtを細かくする。

　　１自由度系の運動方程式を多自由度系の運動方程式にし、質量、減衰、剛性をマトリクスとし、未知量の変位スカラー量をベクトルにして解く方法が直接積分法である。

(8) 非線形解析法 (非線形解析法を理解する)

- **非線形解析の手順**
  復元力Qが変位の履歴に依存する場合、1自由度系の運動方程式は下式で示される。

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+Q=f(t)$$

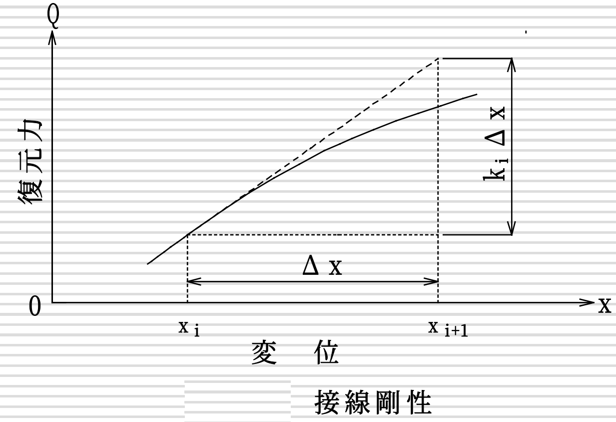
したがって、時刻t_iとt_{i+1}に対して、下式が成り立つ。

$$m\ddot{x}_i+c\dot{x}_i+Q_i=f_i$$

$$m\ddot{x}_{i+1}+c\dot{x}_{i+1}+Q_{i+1}=f_{i+1}$$

増分形式にすると、下式となる。

$$m\Delta\ddot{x}_i+c\Delta\dot{x}_i+\left(Q_{i+1}-Q_i\right)=\Delta f_i$$



- **非線形解析の手順（続き）**
  速度と加速度の増分はニューマークβ法を用いると下式で示される。

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{1}{2\beta\Delta t}\Delta x_i - \frac{1}{2\beta}\dot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\ddot{x}_i\Delta t$$

$$\Delta\ddot{x}_i = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta x_i - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_i$$

しかし、非線形の場合、Q_{i+1}が未知であるため、それを仮定する必要がある。図に示すように、　時刻t_{i+1}における復元力Q_{i+1}は下式で仮定する。

$$\left(Q_{i+1}\right)_a = Q_i + k_i\Delta x_i$$

したがって、増分形式の運動方程式が構築される。

$$m\Delta\ddot{x}_i + c\Delta\dot{x}_i + k_i\Delta x_i = \Delta f_i$$

□ 非線形解析の手順（続き）

求める増分変位は下式で示される。

$$\Delta x_i = \frac{\Delta \bar{f}_i}{\bar{k}_i}$$

$$\bar{k}_i = \frac{m}{\beta \Delta t^2} + \frac{c}{2\beta \Delta t} + k_i$$

$$\Delta \bar{f}_i = \Delta f_i + \left\{ \frac{m}{2\beta} - c\Delta t \left(1 - \frac{1}{4\beta} \right) \right\} \ddot{x}_i + \left\{ \frac{m}{\beta \Delta t} + \frac{c}{2\beta} \right\} \dot{x}_i$$

時刻t_{i+1}の変位、速度は下式で求められる

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \qquad \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta \dot{x}_i$$

□ 非線形解析の手順（続き）

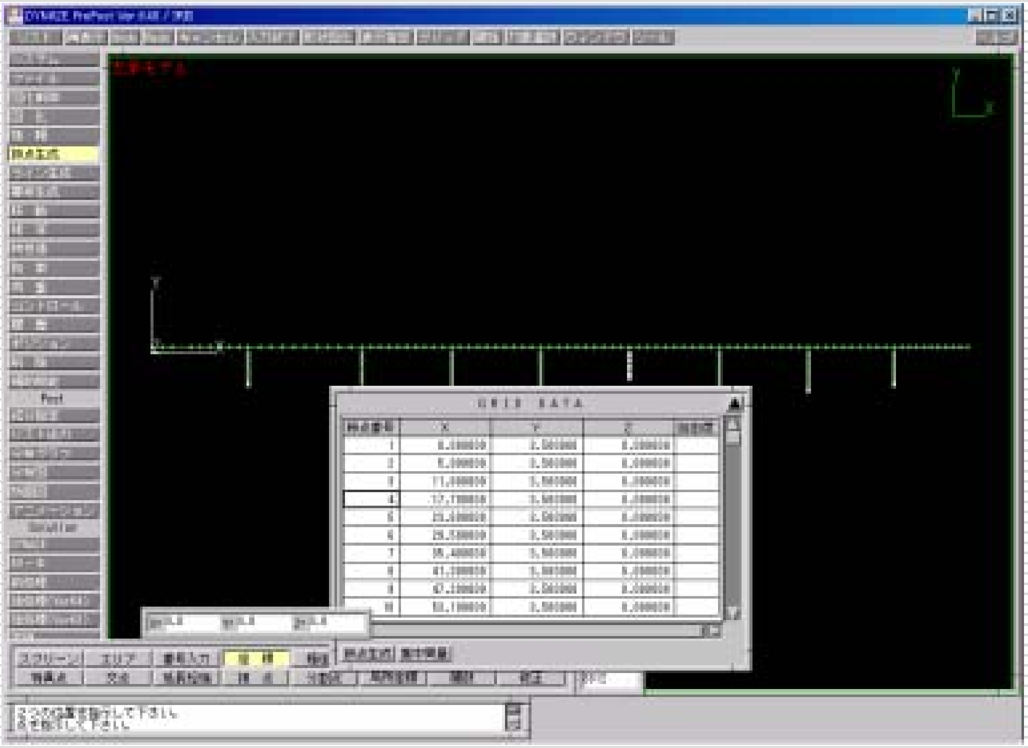
したがって、本来の復元力Q_{i+1}を使用して、時刻t_{i+1}の加速度を下式より求める。

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{m}\left(f_{i+1} - c\dot{x}_{i+1} - Q_{i+1} \right)$$

非線形解析では、このように順次振動状態を計算する。ただし、Q_{i+1}と$Q_i + k_i \Delta x_i$の差異（不釣合力）を最小限にするために、収束計算をするか、次ステップに荷重として持ち越すことを行う。また、$\beta = 1/4$の場合、質量の無い節点では安定解が得られない場合があるため、$\beta = 1/3$とすることもある。

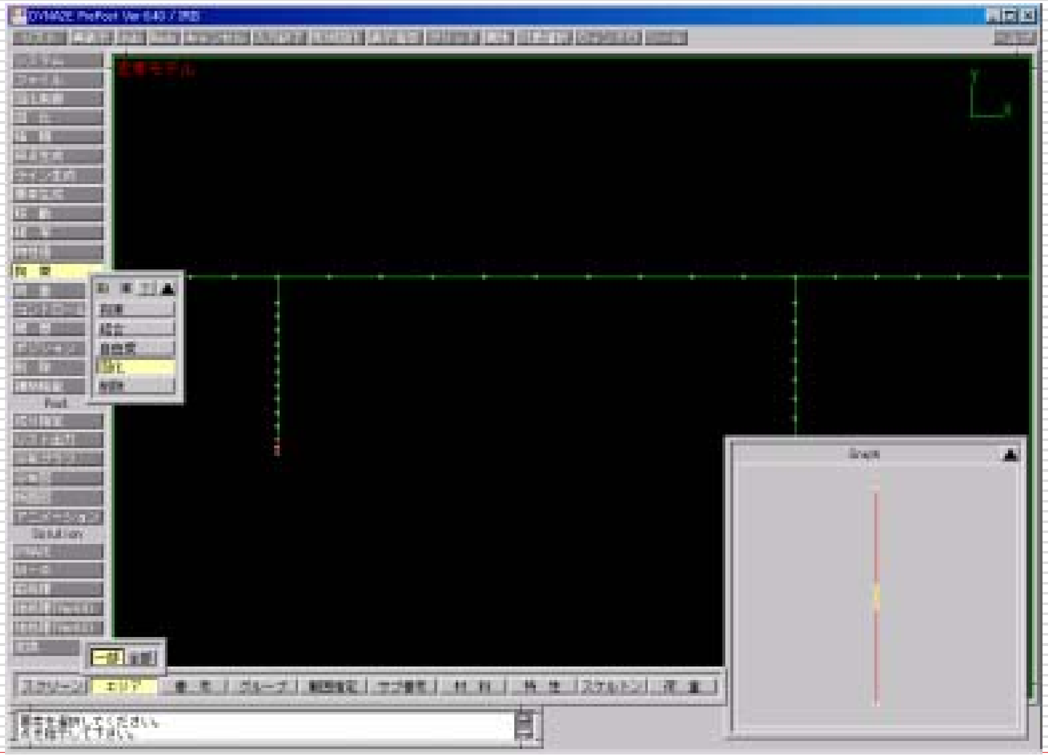
非線形解析の例（その1）

節点データの作成



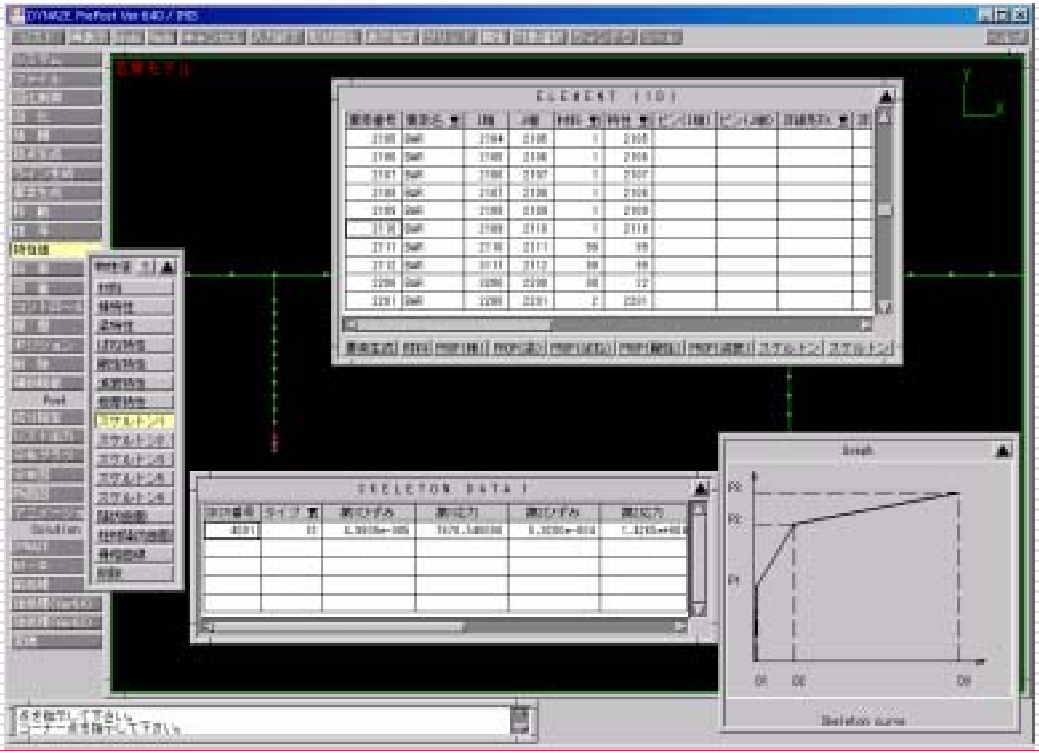
非線形解析の例（その2）

塑性ヒンジの確認図



非線形解析の例（その3）

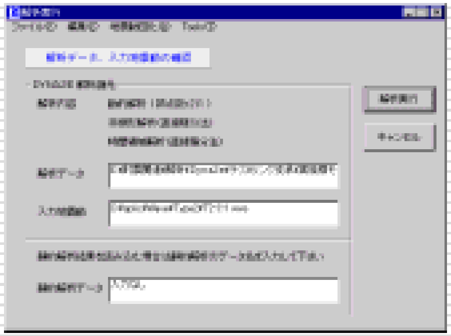
部材の復元力特性入力



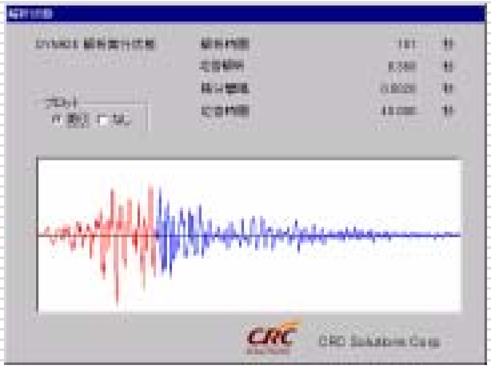
非線形解析の例（その4）

ＤＹＮＡ２Ｅ起動画面

解析データ選択

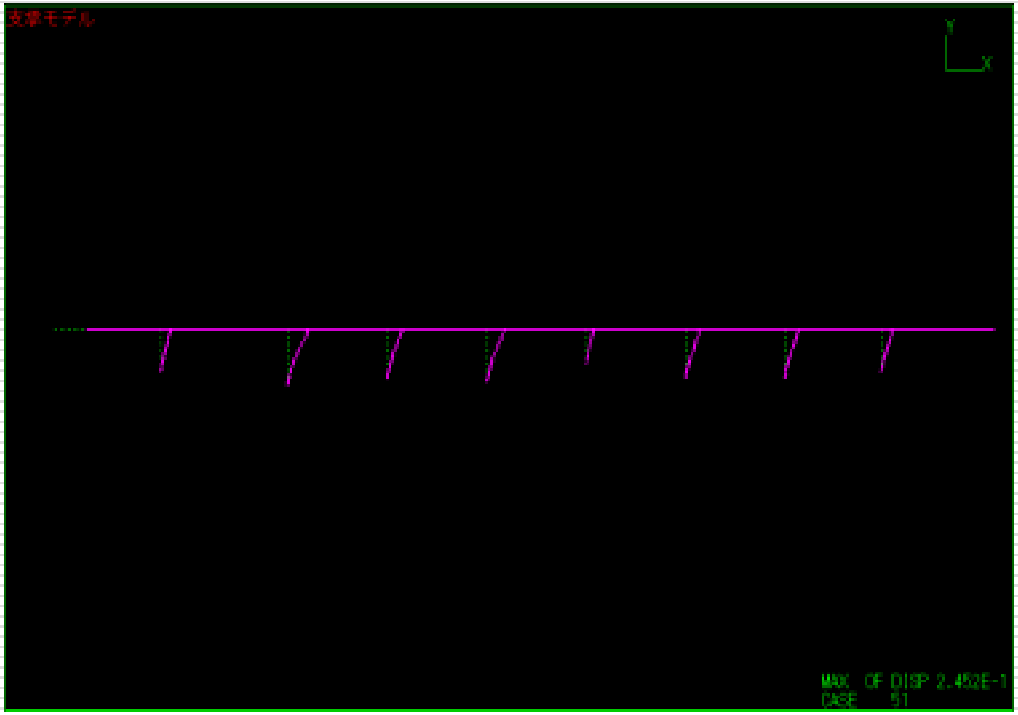


解析実行画面



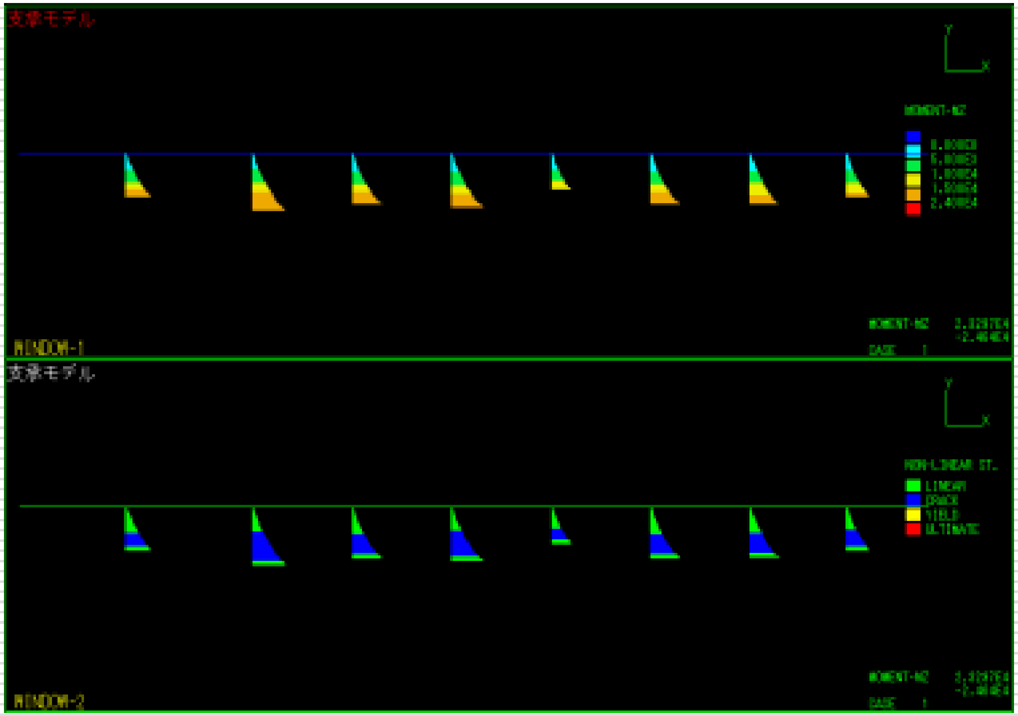
非線形解析の例（その6）

最大変形図



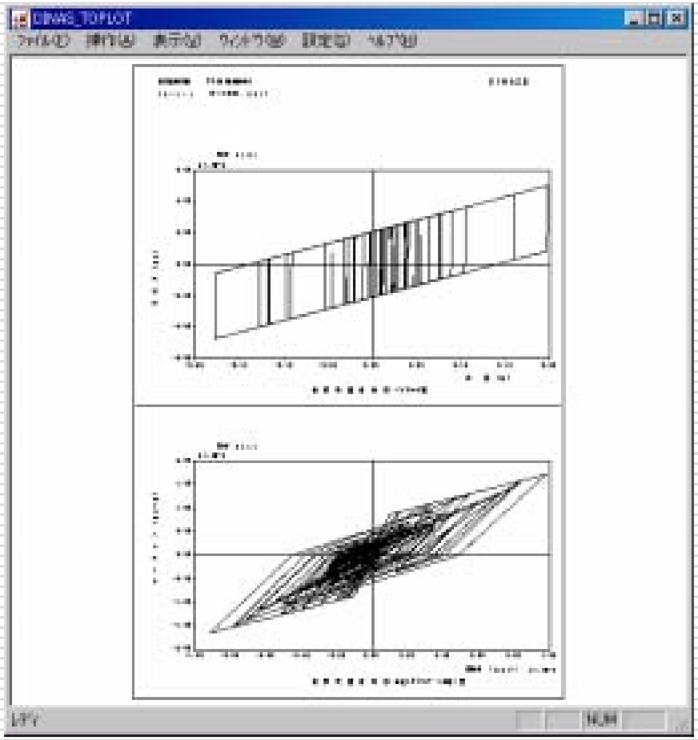
非線形解析の例（その7）

最大曲げモーメント図、塑性化状態図



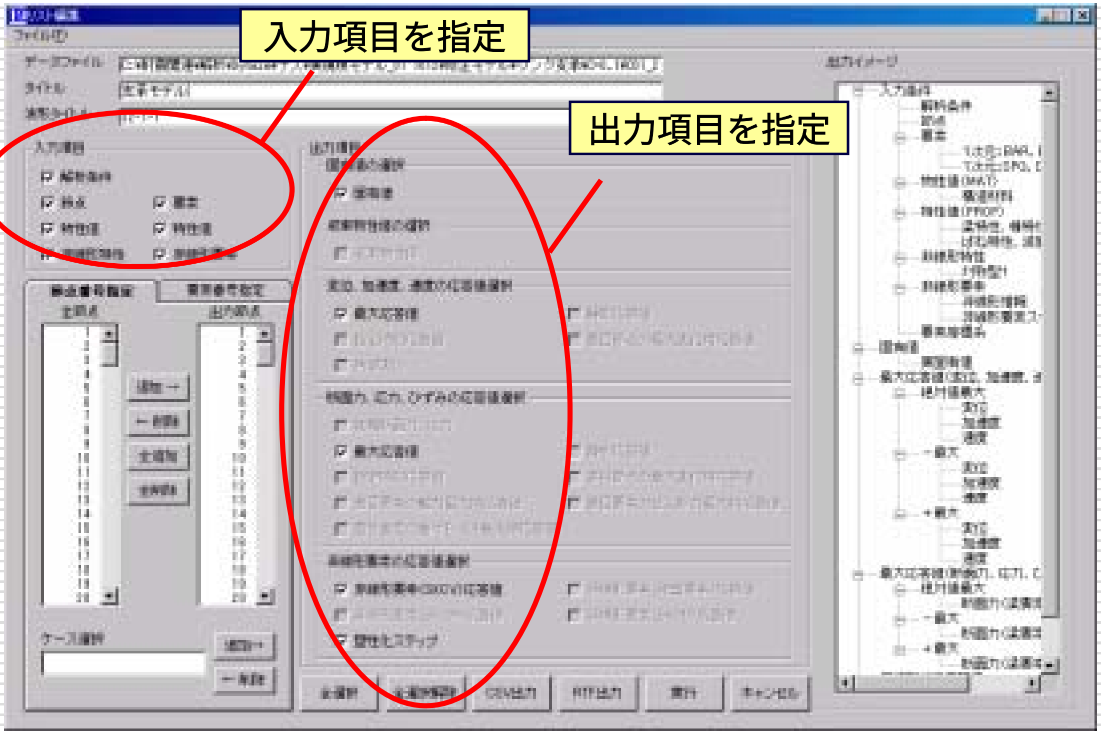
非線形解析の例(その8)

支承のP－γ曲線、塑性ヒンジのM－θ曲線



非線形解析の例（その9）

解析結果の表出力



非線形解析の例（その１０）

部材の塑性率等の表出力